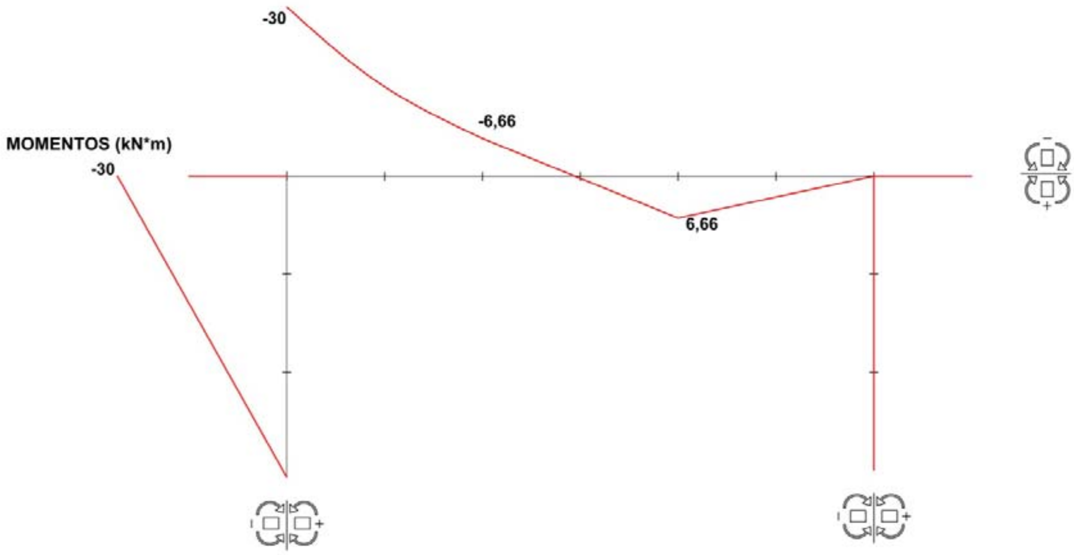
ETS de ARQUITECTURA de MADRID,

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

ESTRUCTURAS I.

EJERCICIOS SOBRE DIAGRAMAS DE ESFUERZOS



Planteamiento: JOSÉ L. FERNÁNDEZ CABO

Desarrollo: MARÍA LUCÍA CERMEÑO, RUBÉN CONDE GÓMEZ.

Con la Colaboración de: JOSÉ L. FERNÁNDEZ CABO, JOAQUÍN ANTUÑA BERNARDO, ALMUDENA MAJANO MAJANO.

MADRID, Junio 2013 (v1)

La colaboración de los alumnos María Lucía Cermeño y Rubén Conde Gómez ha sido posible gracias al proyecto de innovación educativa IE12_13-03013 financiado por la Universidad Politécnica de Madrid en el curso 2012-13.

INTRODUCCIÓN

Se van a trazar los diagramas de esfuerzos normales, cortantes y flectores (o simplemente ***diagramas de esfuerzos***) de estructuras relativamente simples, y además en orden creciente de complejidad. Los comentarios y explicaciones serán por ello mayores y de aspectos más básicos al comienzo, y poco a poco se irá atendiendo a cuestiones más complejas. *Se recomienda por ello que el alumno lea este documento en el orden que está escrito.*

Se tratará sólo el caso de estructuras isostáticas, de modo que obtener las reacciones no sea un problema en sí mismo. Con ello ***el problema a resolver se reduce a la aplicación de las ecuaciones de equilibrio.***

El método a seguir es muy simple, ir ***dando cortes***, y determinar los esfuerzos necesarios en dicho corte para que esa parte de la estructura, aislada por un corte, esté también en equilibrio. Como se verá, *las relaciones diferenciales que existen entre la carga, el cortante y el flector permiten reducir notablemente el número necesario de cortes.*

Los diagramas de esfuerzos son una herramienta tremendamente útil. *De un solo vistazo nos dan información sobre el conjunto de la pieza. Es imprescindible tener soltura en este terreno, tanto para el trazado como, quizás más todavía, para su interpretación.*

VIGA BIAPOYADA

La viga biapoyada es probablemente la estructura más simple de estructuras de edificación. Pero es que además es muy frecuente, sobre todo en ciertos sistemas constructivos, como en madera. Merece la pena comenzar por aquí.

- **EJERCICIO 1**

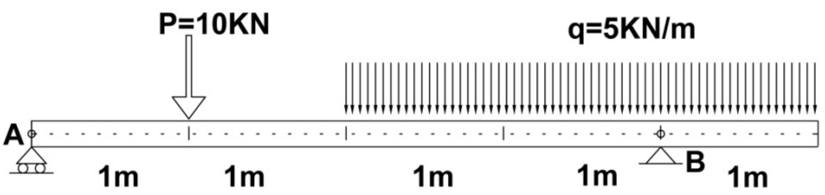


Figura 1. **Viga Biapoyada**

Cálculo de Reacciones

El primer paso es identificarlas, de acuerdo con el tipo de sustentación establecida, y además fijar a priori su sentido.

En este caso (**Figura 2**), la sustentación en **A**, un apoyo en deslizamiento o carrito, coacciona el movimiento vertical. *Aparece, por tanto, una sola reacción que además debe ser vertical.*

El sentido asignado a priori es totalmente arbitrario. Si luego el valor obtenido tuviera signo negativo simplemente se cambia el sentido inicialmente supuesto.

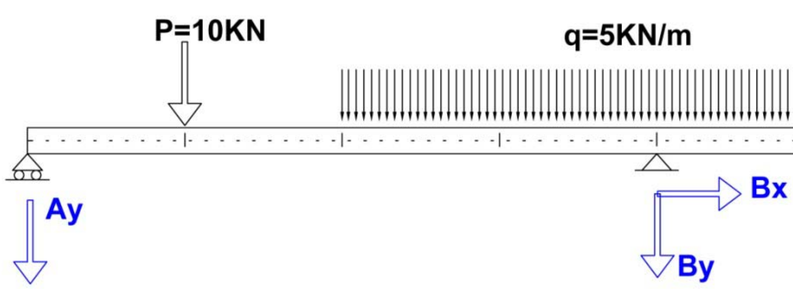


Figura 2. **Acciones y Reacciones**

La sustentación en **B** es una *articulación* (**¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**), y por tanto están coaccionados dos desplazamientos, es decir, el movimiento en el plano.

Lo más sencillo y habitual, aunque no obligatorio, es separar la reacción en sus componentes vertical y horizontal, como se muestra en la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**. En otros casos, y como se verá más adelante, puede interesar usar otra descomposición.

Y de nuevo el sentido fijado a priori es arbitrario. Pero una vez establecidos los sentidos deben respetarse de forma sistemática al plantear el equilibrio.

A partir de aquí se irán planteando una y otra vez las condiciones de equilibrio global o de una parte de la estructura.

Es importante observar no obstante que el criterio de signos para plantear dicho equilibrio es a su vez arbitrario.

Veamos esta cuestión con el equilibrio global de momentos. Primero se considera positivo el sentido antihorario

$$\sum M_A = 0 \quad (+\circlearrowleft) \Rightarrow -4B_y - P - 3*3,5q = 0 \Rightarrow \boxed{B_y = -15,63}$$

El signo negativo indica que la reacción vertical en B es hacia arriba, y no hacia abajo como inicialmente asumimos.

Y si ahora se asume positivo el sentido horario, se comprueba que el resultado, como no podría ser de otro modo, es el mismo (matemáticamente no se ha hecho más que multiplicara ambos lados de la ecuación por -1, lo que produce una ecuación idéntica).

$$\sum M_A = 0 \quad (+\circlearrowright) \Rightarrow +4B_y + P + 3*3,5q = 0 \Rightarrow \boxed{B_y = -15,63}$$

Y lo mismo sucedería con cualquier otra ecuación de equilibrio. Se han usado entonces dos criterios de signos independientes y además arbitrarios, unos para el sentido de las reacciones y otro para establecer las ecuaciones de equilibrio.

En muchos casos, siempre en las vigas biapoyadas, *es perfectamente posible plantear el equilibrio de las reacciones usando siempre* ***una sola ecuación con una sola incógnita; y además hacerlo sin usar los resultados antes obtenidos para otras reacciones****. Es una cuestión* ***importante*** *porque* ***simplifica el problema*** *y además permite una verificación final de los resultados que* ***evita errores****.*

En este caso, para el cálculo por ejemplo de A_y, en lugar de usar el equilibrio de fuerzas verticales, que supondría usar el resultado de B_y (que podría ser erróneo), si se toman momentos en B se obtiene una ecuación cuya única incógnita es la buscada, A_y; y eso da robustez al cálculo.

$$\sum M_B = 0 \quad (+\circlearrowleft) \Rightarrow 4 \cdot A_y + 3 \cdot P + 2 \cdot q - \frac{q}{2} = 0 \Rightarrow \boxed{A_y = -9{,}38}$$

El equilibrio global de fuerzas horizontales da una ecuación trivial. Realmente hubiera sido razonable haber comenzado por ahí.

$$\sum F_x = 0 \;\; (+\rightarrow) \Rightarrow \boxed{B_x = 0}$$

Al haber obtenido las reacciones verticales mediante dos ecuaciones independientes de momentos permite verificar la consistencia de dichos resultados mediante la ecuación el equilibrio global de fuerzas verticales, no usada todavía:

$$\sum F_y = 0 \quad (+\downarrow) \quad \Rightarrow P + 3q + A_y + B_y = 0 \quad \Rightarrow 10 + 3 \cdot 5 - 9{,}38 - 15{,}63 = 0 \Rightarrow ok$$

Una vez visto que es irrelevante el sentido fijado a priori para las reacciones y para las ecuaciones de equilibrio, cabe mencionar que, desde el punto de vista práctico, no es malo mantener un mismo sentido inicial para las reacciones y al plantear las ecuaciones de equilibrio. Eso crea un hábito y con ello se refuerza la seguridad al operar.

Relaciones diferenciales para la flexión simple (esfuerzos cortante y flector, sin axil)

Para dibujar y verificar los diagramas de esfuerzos de cortantes y flectores usando los mínimos cortes es necesario recordar las siguientes relaciones diferenciales:

- Relación diferencial entre el cortante y la carga lineal

$$\frac{dV}{dx} = -q \quad \Rightarrow \text{la pendiente del diagrama de cortantes es igual a la carga}$$

(el signo menos indica que son de sentidos contrarios)

Esta relación permite ver la congruencia de la gráfica de cortantes respecto a la carga.

- Relación diferencial entre el momento y el cortante

$$\frac{dM}{dx} = V \quad \Rightarrow \text{la pendiente del diagrama de momentos es igual al cortante}$$

(el signo menos indica que son de sentidos contrarios)

Esta relación permite ver la congruencia de la gráfica de momentos respecto a la de cortantes.

$$M_A - M_B = \int_A^B V \cdot dx \quad \Rightarrow \text{el área de cortantes entre dos secciones A y B es igual}$$

al salto de momentos entre dichas secciones A y B

Esta relación permite construir la gráfica de momentos sumando simplemente áreas de la de cortante, lo que en muchas ocasiones es lo más sencillo.

Cálculo de Esfuerzos

En la Figura **3** se han numerado los cortes que se van a dar para una mayor claridad. Ahora además dibujamos el sentido correcto de las reacciones y su valor.

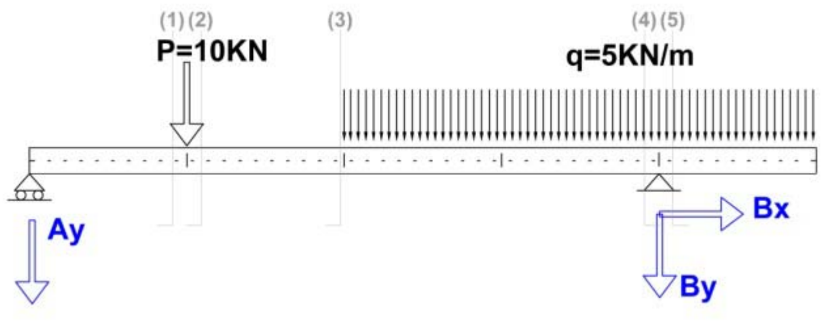


Figura 3. **Sistema completo de acciones y reacciones**

Como se ha dicho, para calcular los esfuerzos procederemos a realizar cortes y plantear el equilibrio de una parte de la estructura.

Al realizar los cortes nos podremos quedar con cualquiera de las partes, ya que todas ellas deben estar en equilibrio. Lo razonable es optar por la opción más sencilla.

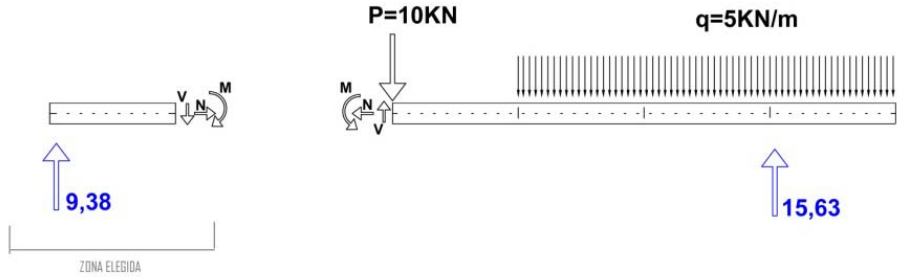


Figura 4. **Corte por la sección 1**

En este caso sería la parte izquierda, aunque como primer ejemplo se analizarán ambos lados.

Para plantear el equilibrio, y respecto al criterio de signos, se procede como con las reacciones: ***se puede asumir a priori un signo de los esfuerzos***. *De nuevo se trata de un criterio arbitrario*. ***Pero como el criterio de signos de los esfuerzos está definido a priori, en este caso es más que razonable usar dicho signo como convenio permanente en cada problema.***

En lo que sigue supongamos positivo el siguiente convenio mostrado en la Figura 5:

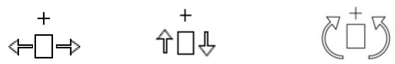


Figura 5. **Convenio de signos para los esfuerzos axil, cortante y flector**

Al analizar un corte se puede ver el problema de dos modos.

MODO 1: Mirando a la parte eliminada. Los esfuerzos no son más que el efecto estático de la parte eliminada sobre la parte escogida. Si se trata de fuerzas, es esfuerzo es el sumatorio de las fuerzas eliminadas, y con su mismo signo. Si se trata de momentos, el esfuerzo es el momento de las acciones eliminadas en el centro de gravedad de la sección de referencia, y también con el mismo signo.

MODO 2. Mirando a la parte que queda. Los esfuerzos son las fuerzas internas que cierran el equilibrio en esa parte.

Se pueden ver estas dos formas de atacar el problema en lo que sigue.

Cortantes

Modo 1. Mirando a la parte eliminada

$$(\downarrow)\sum F_y = 0 \rightarrow P + 3\cdot q - V - 15,63 = 0 \rightarrow \boxed{V = 9,38}$$

Modo 2. Mirando a la parte que queda

$$(\downarrow)\sum F_y = 0 \rightarrow V - 9,38 = 0 \rightarrow \boxed{V = 9,38}$$

Axiles

Modo 1. Mirando a la parte eliminada

$$(\rightarrow)\sum F_x = 0 \rightarrow \boxed{N = 0}$$

Modo 2. Mirando a la parte que queda

$$(\rightarrow)\sum F_x = 0 \rightarrow \boxed{N = 0}$$

Momentos

Modo 1. Mirando a la parte eliminada

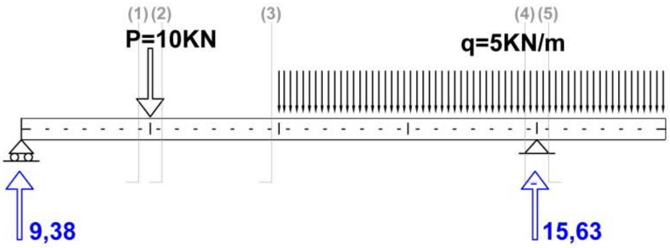
$$(\circlearrowleft)\sum M_{pc} = 0 \rightarrow -3\cdot 2,5\cdot q + 15,63\cdot 3 + M = 0 \rightarrow \boxed{M = -9,38}$$

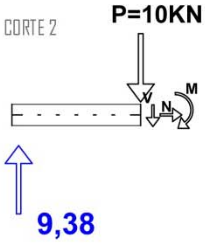
Modo 2. Mirando a la parte que queda

$$(\circlearrowleft)\sum M_{pc} = 0 \rightarrow -9,38 - M = 0 \rightarrow \boxed{M = -9,38}$$

Como era de esperar se obtienen idénticos resultados

Una vez entendida la validez de ambos métodos se elegirá uno u otro según convenga, siempre el que se considere más sencillo.





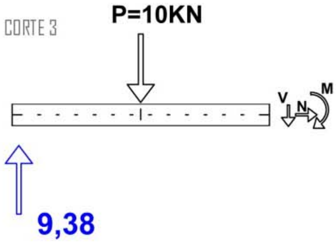
CORTE 2

$$(\rightarrow)\sum F_x = 0 \rightarrow \boxed{N = 0}$$

$$(\downarrow)\sum F_y = 0 \rightarrow P + V - 9,38 = 0 \rightarrow \boxed{V = -0,63}$$

$$(\circlearrowright)\sum M_2 = 0 \rightarrow -9,38 - M = 0 \rightarrow \boxed{M = -9,38}$$

Por no existir cargas en el tramo, el cortante en todo él es constante y como $\dfrac{dM}{dx} = V$ el diagrama de momentos será una recta, en su parte izquierda valdrá cero por ser un apoyo que permite el giro y en la parte derecha el valor calculado.



CORTE 3

$$(\rightarrow)\sum F_x = 0 \rightarrow \boxed{N = 0}$$

$$(\downarrow)\sum F_y = 0 \rightarrow P + V - 9,38 = 0 \rightarrow \boxed{V = -0,63}$$

$$(\circlearrowright)\sum M_3 = 0 \rightarrow -9,38 - M = 0 \rightarrow \boxed{M = -9,38}$$

CORTE 4

$$(\rightarrow)\sum F_x = 0 \rightarrow \boxed{N = 0}$$

$$(\downarrow)\sum F_y = 0 \rightarrow q - 15,63 - V = 0 \rightarrow \boxed{V = -10,63}$$

$$(\circlearrowright)\sum M_4 = 0 \rightarrow M - \frac{q}{2} = 0 \rightarrow \boxed{M = 2,5}$$

Por existir una carga distribuida en el tramo, el cortante varía de forma lineal y como $\dfrac{dM}{dx} = -V$ el diagrama de momentos será una parábola. En su parte derecha será cero y en su parte izquierda el valor calculado.

CORTE 5

$$(\rightarrow)\sum F_x = 0 \rightarrow \boxed{N = 0}$$

$$(\downarrow)\sum F_y = 0 \rightarrow q - V = 0 \rightarrow \boxed{V = -10,63}$$

$$(\circlearrowright)\sum M_5 = 0 \rightarrow M - \frac{q}{2} = 0 \rightarrow \boxed{M = 2,5}$$

Figura 6. **Cálculo de esfuerzos en las distintas secciones**

Diagramas de esfuerzos

Para el axil y el cortante, la gráfica se representa según el convenio mostrado en la

Figura 7:

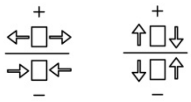
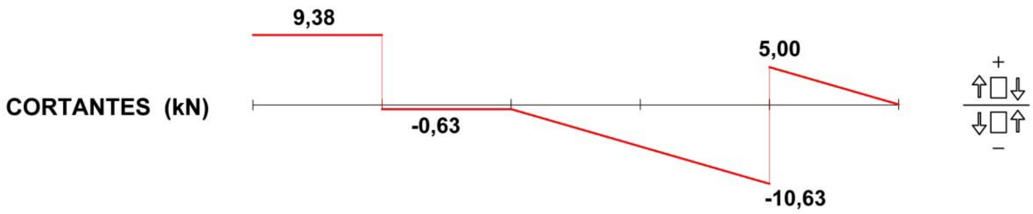


Figura 7. **Convenio para la representación de esfuerzos en los diagramas**

Es un convenio arbitrario. Si nos piden otro lo seguimos.

Pero para el flector el convenio está unificado y no lo podemos modificar: consiste en dibujar la gráfica en lado de la cara traccionada de dicha sección. En los ejemplos se verá con más claridad.

Con los valores obtenidos en los cortes y la forma deducida para las gráficas se obtienen los siguientes diagramas de esfuerzos:



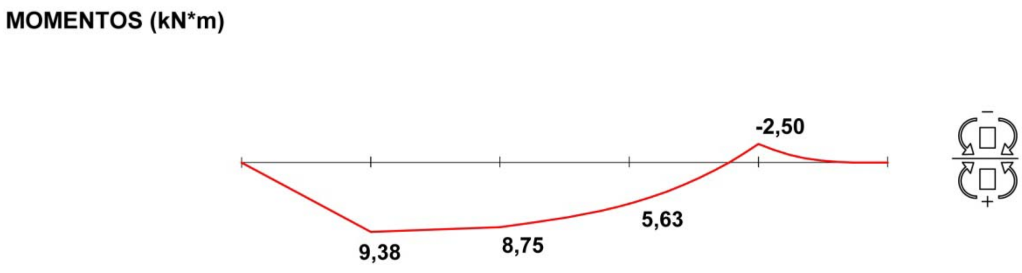


Figura 8. **Gráficas de esfuerzos cortantes, flectores y axiles del ejercicio 1**

VIGA CONTINUA

- **EJERCICIO 2**

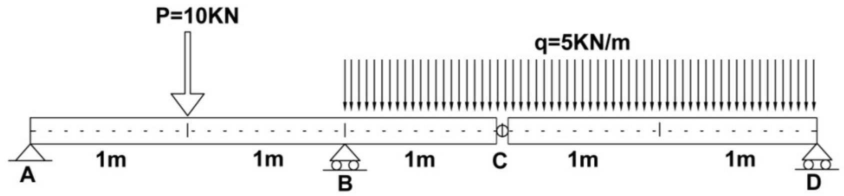


Figura 9. **Viga Gerber**

Cálculo de Reacciones

El primer paso es identificarlas, de acuerdo con el tipo de sustentación establecida, y además fijar a priori su sentido.

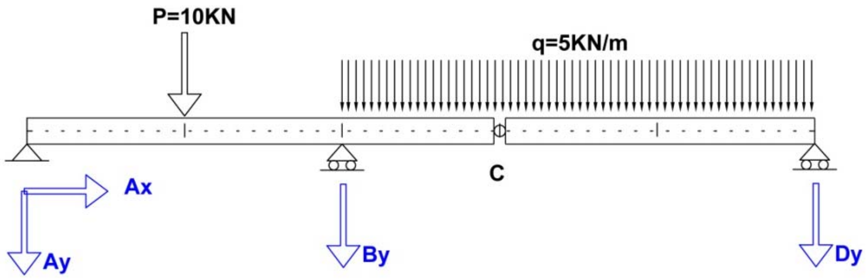


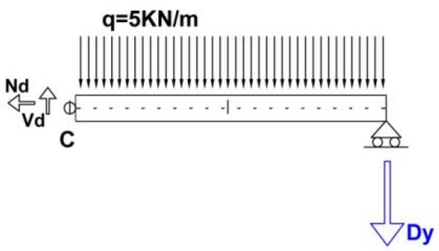
Figura 10. **Acciones y Reacciones**

En esta estructura además aparece una nueva articulación en **C**, lo cual es necesario para el cálculo de las reacciones ya que si no tendríamos más incógnitas que ecuaciones.

El equilibrio global de fuerzas horizontales da una ecuación trivial.

$$(\rightarrow)\sum F_x = 0 \rightarrow \boxed{A_x = 0}$$

En este caso, para el cálculo de las reacciones será necesario partir la estructura por la articulación C. Con ello se obtendrán las reacciones en D.



$$\sum M_C = 0 \quad (+\circlearrowright) \Rightarrow 2\cdot q + 2\cdot D_y = 0 \Rightarrow \boxed{D_y = -5}$$

Una vez obtenida una de las reacciones se obtendrán el resto.

$$\sum M_A = 0 \quad (+\circlearrowright) \Rightarrow P + 3 \cdot 3{,}5 \cdot q + 2 \cdot B_y + 5 \cdot D_y = 0 \Rightarrow P + 3 \cdot 3{,}5 \cdot q + 2 \cdot B_y + 5 \cdot (-5) = 0 \Rightarrow \boxed{B_y = -18{,}75}$$

$$\sum M_B = 0 \quad (+\circlearrowright) \Rightarrow 2 \cdot A_y + P - 3 \cdot 1{,}5 \cdot q - 3 \cdot D_y = 0 \Rightarrow 2 \cdot A_y + P - 3 \cdot 1{,}5 \cdot q - 3 \cdot (-5) = 0 \Rightarrow \boxed{A_y = -1{,}25}$$

Al haber obtenido las reacciones verticales mediante dos ecuaciones independientes de momentos permite verificar la consistencia de dichos resultados mediante la ecuación el equilibrio global de fuerzas verticales, no usada todavía:

$$\sum F_y = 0 \quad (+\downarrow) \quad \Rightarrow P + 3q + A_y + B_y + D_y = 0 \quad \Rightarrow 10 + 3 \cdot 5 - 1{,}25 - 18{,}75 - 5 = 0 \Rightarrow ok$$

Una vez visto que es irrelevante el sentido fijado a priori para las reacciones y para las ecuaciones de equilibrio, cabe mencionar que, desde el punto de vista práctico, no es malo mantener un mismo criterio de signos. Eso crea un hábito y con ello se refuerza la seguridad al operar.

Cálculo de Esfuerzos

En la Figura **3** se han numerado los cortes que se van a dar para una mayor claridad.

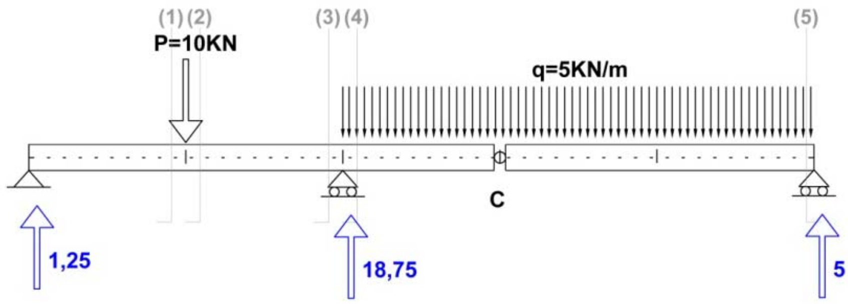
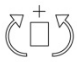


Figura 11. **Sistema completo de acciones y reacciones**

Como se ha dicho, para calcular los esfuerzos procederemos a realizar cortes y plantear el equilibrio de una parte de la estructura.

Al realizar los cortes nos podremos quedar tanto con cualquiera de las partes, ya que todas ellas deben estar en equilibrio. Lo razonable es optar por la opción más sencilla.

Para plantear el equilibrio, y respecto al criterio de signos, se procede como con las reacciones: ***se asume a priori un signo de los esfuerzos***. *De nuevo se trata de un criterio arbitrario*. Pero como los esfuerzos se definen ya con un signo, en este caso es más que razonable usar dicho signo como convenio permanente en cada problema.

En lo que sigue supongamos positivo  el siguiente convenio:

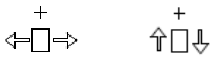
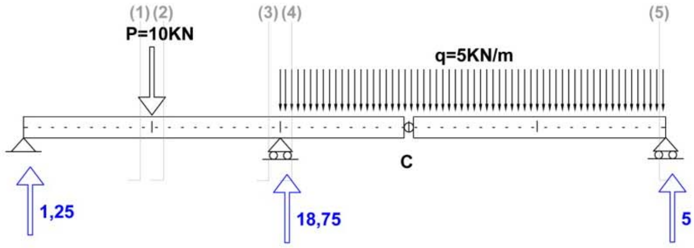
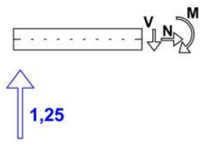


Figura 12. **Convenio de signos**



CORTE I



CORTE 1

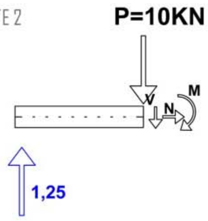
$(\rightarrow)\sum F_x = 0 \rightarrow \boxed{N=0}$

$(\downarrow)\sum F_y = 0 \rightarrow V - 1,25 = 0 \rightarrow \boxed{V = 1,25}$

$(\circlearrowleft)\sum M_1 = 0 \rightarrow -1,25 - M = 0 \rightarrow \boxed{M = -1,25}$

Por no existir cargas en el tramo, el cortante en todo él es constante y como $\dfrac{dM}{dx} = -V$ el digrama de momentos será una recta, en su parte izquierda valdrá cero por ser un apoyo que permite el giro y en la parte derecha el valor calculado.

CORTE 2



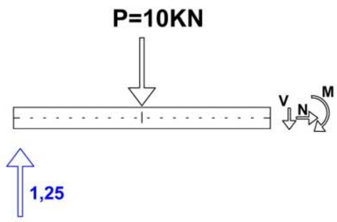
CORTE 2

$(\rightarrow)\sum F_x = 0 \rightarrow \boxed{N=0}$

$(\downarrow)\sum F_y = 0 \rightarrow P + V - 1,25 = 0 \rightarrow \boxed{V = -8,75}$

$(\circlearrowright)\sum M_2 = 0 \rightarrow 1,25 + M = 0 \rightarrow \boxed{M = -1,25}$

CORTE 3



CORTE 3

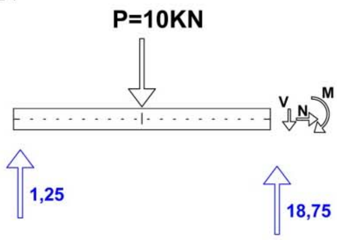
$(\rightarrow)\sum F_x = 0 \rightarrow \boxed{N=0}$

$(\downarrow)\sum F_y = 0 \rightarrow V + P - 1,25 = 0 \rightarrow \boxed{V = -8,75}$

$(\circlearrowright)\sum M_3 = 0 \rightarrow M + 1,25 \cdot 2 - P = 0 \rightarrow \boxed{M = 7,5}$

Por existir una carga puntual el cortante en ese punto tendrá un salto de su mismo valor. La gráfica de momentos serán rectas con distintas pendientes.

CORTE 4



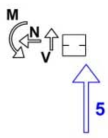
CORTE 4

$(\rightarrow)\sum F_x = 0 \rightarrow \boxed{N=0}$

$(\downarrow)\sum F_y = 0 \rightarrow P - 1,25 - 18,75 + V = 0 \rightarrow \boxed{V = 10}$

$(\circlearrowleft)\sum M_4 = 0 \rightarrow P - M - 1,25 \cdot 2 = 0 \rightarrow \boxed{M = 7,5}$

CORTE 5



CORTE 5

$(\rightarrow)\sum F_x = 0 \rightarrow \boxed{N=0}$

$(\downarrow)\sum F_y = 0 \rightarrow -5 - V = 0 \rightarrow \boxed{V = -5}$

$(\circlearrowleft)\sum M_5 = 0 \rightarrow M = 0 \rightarrow \boxed{M = 0}$

Figura 13. **Cálculo de esfuerzos en las distintas secciones**

NOTA: Entre (4) y (5), por existir una carga distribuida, el cortante varía linealmente. Y como $\dfrac{dM}{dx} = V$, la gráfica de momentos es una parábola de la que conocemos los valores en sus extremos.

Diagramas de esfuerzos

Para el axil y el cortante, la gráfica se representa según el convenio mostrado en la:

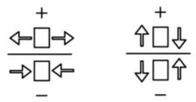


Figura 14. **Convenio para la representación de esfuerzos en los diagramas**

Con los valores obtenidos en los cortes y la forma deducida para las gráficas se obtienen los siguientes diagramas de esfuerzos:

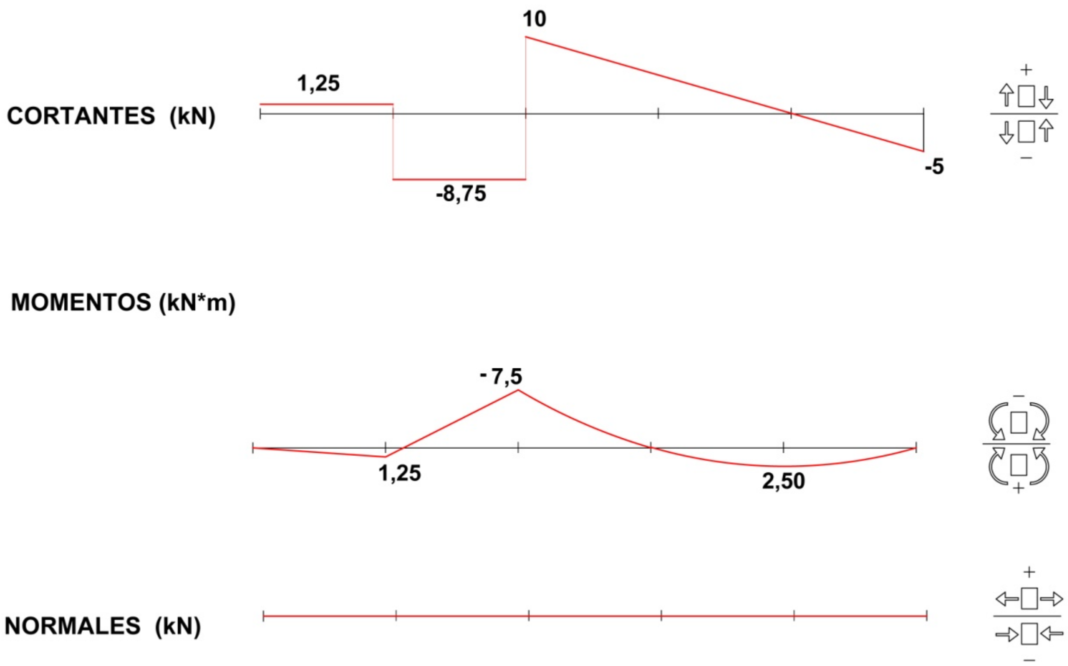


Figura 15. **Gráficas de esfuerzos cortantes, flectores y axiles del ejercicio 2**

PÓRTICOS

- **EJERCICIO 3**

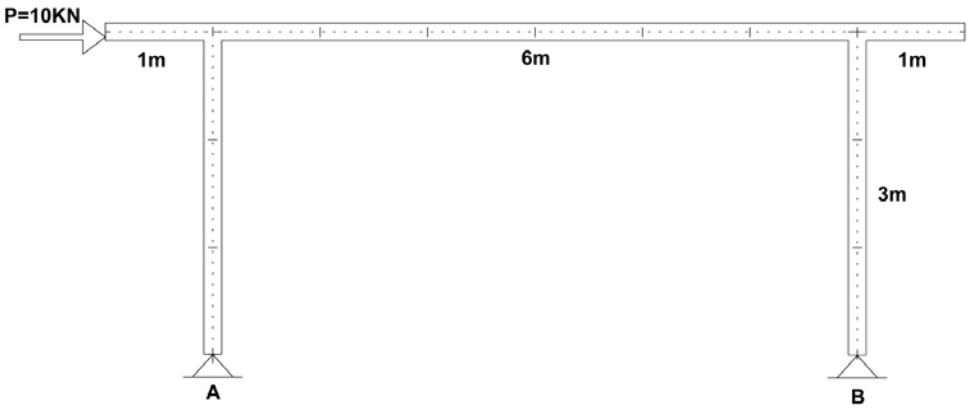


Figura 16. **Pórtico**

Cálculo de Reacciones

En este caso estamos en una estructura hiperestática ya que en el cálculo de las reacciones nos encontramos con más incógnitas que reacciones. Por tanto una forma de solucionarlo es asumir que las reacciones horizontales son iguales.

Figura 17. **Acciones y Reacciones**

A partir de aquí se irán planteando una y otra vez las condiciones de equilibrio global o de una parte de la estructura.

Es importante observar no obstante que el criterio de signos para plantear dicho equilibrio es a su vez arbitrario.

$$(\rightarrow)\sum F_x = 0 \Rightarrow P - 2 \cdot H = 0 \rightarrow \boxed{H = 5}$$

$$\sum M_A = 0 \quad (+\circlearrowright) \Rightarrow 3 \cdot P + 6 \cdot V_B = 0 \Rightarrow \boxed{V_B = -5}$$

$$\sum M_B = 0 \quad (+\circlearrowright) \Rightarrow 3 \cdot P - 6 \cdot V_A = 0 \Rightarrow \boxed{V_A = 5}$$

Al haber obtenido las reacciones verticales mediante dos ecuaciones independientes de momentos permite verificar la consistencia de dichos resultados mediante la ecuación el equilibrio global de fuerzas verticales, no usada todavía:

$$\sum F_y = 0 \quad (+\downarrow) \quad \Rightarrow V_A + V_B = 0 \Rightarrow ok$$

Cálculo de Esfuerzos

En la **Figura 18** se han numerado los cortes que se van a dar para una mayor claridad.

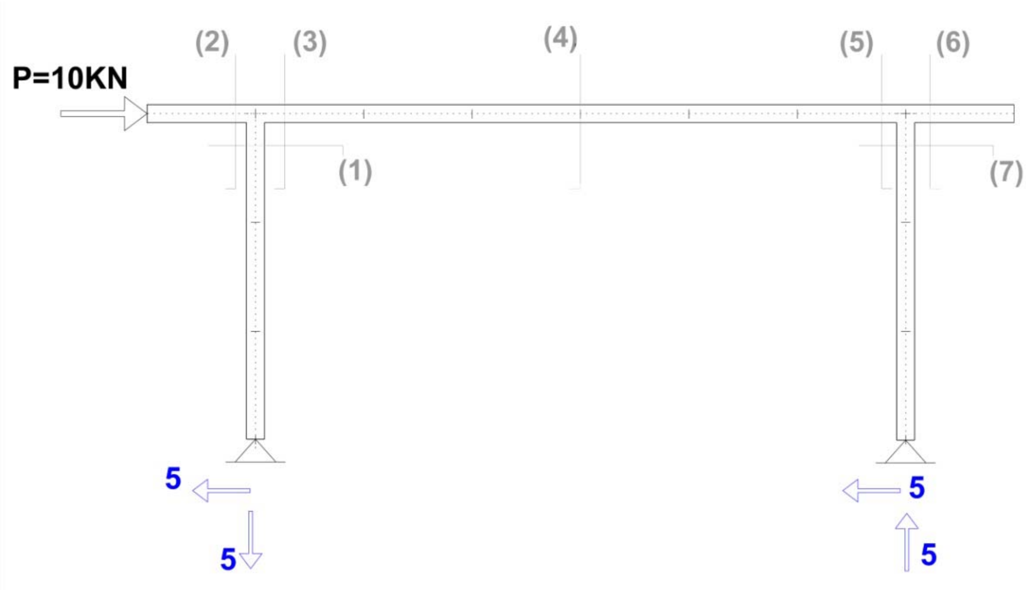
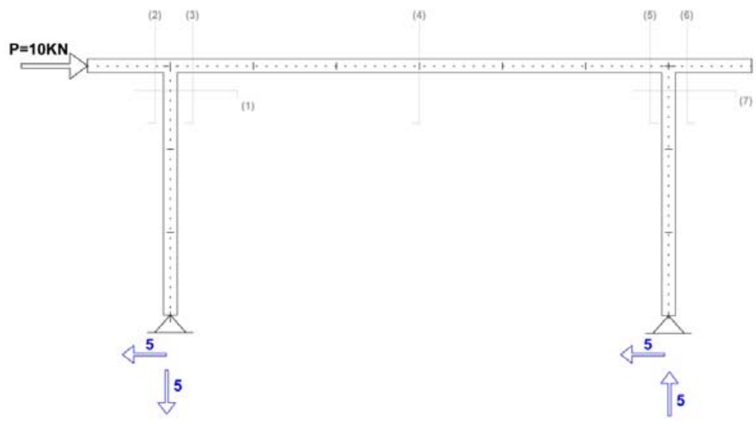
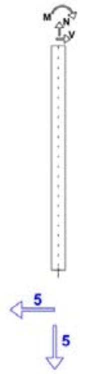


Figura 18. **Sistema completo de acciones y reacciones**

En lo que sigue supongamos positivo el convenio que venimos usando hasta ahora (Figura 12).



CORTE I



CORTE 1

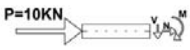
$$(\rightarrow)\sum F_x = 0 \Rightarrow V - 5 = \rightarrow \boxed{V = 5}$$

$$(\downarrow)\sum F_y = 0 \rightarrow 5 - N = 0 \rightarrow \boxed{N = 5}$$

$$(\circlearrowleft)\sum M_1 = 0 \rightarrow 5 \cdot 3 + M = 0 \rightarrow \boxed{M = -15}$$

Por no existir cargas en el tramo, el cortante y los axiles
en todo él son constantes y como $\dfrac{dM}{dx} = V$ el digrama de
momentos será una recta, en su parte inferior valdrá cero
por ser un apoyo que permite el giro y en la parte superior
el valor calculado.

CORTE 2



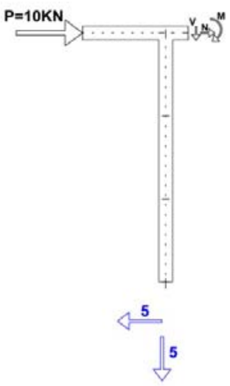
CORTE 2

$$(\rightarrow)\sum F_x = 0 \Rightarrow 10 + N = 0 \rightarrow \boxed{N = -10}$$

$$(\downarrow)\sum F_y = 0 \rightarrow \boxed{V = 0}$$

$$(\circlearrowright)\sum M_2 = 0 \rightarrow \boxed{M = 0}$$

CORTE 3



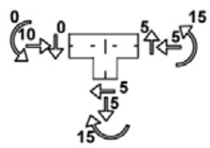
CORTE 3

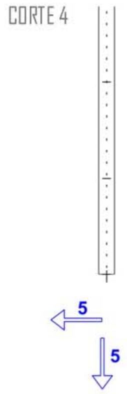
$$(\rightarrow)\sum F_x = 0 \Rightarrow 10 + N - 5 = 0 \rightarrow \boxed{N = -5}$$

$$(\downarrow)\sum F_y = 0 \rightarrow V + 5 = 0 \rightarrow \boxed{V = -5}$$

$$(\circlearrowright)\sum M_3 = 0 \rightarrow 5 \cdot 3 + M = 0 \rightarrow \boxed{M = -15}$$

Puede verse que estos valores obtenidos equilibran el nudo con los esfuerzos obtenidos en los cortes 1 y 2.





CORTE 4

$$(\rightarrow)\sum F_x = 0 \Rightarrow 10 + N - 5 = 0 \rightarrow \boxed{N = -5}$$
$$(\downarrow)\sum F_y = 0 \rightarrow V + 5 = 0 \rightarrow \boxed{V = -5}$$
$$(\circlearrowright)\sum M_4 = 0 \rightarrow 5\cdot 3 - 5\cdot 3 + M = 0 \rightarrow \boxed{M = -15}$$

CORTE 5

$$(\rightarrow)\sum F_x = 0 \rightarrow \boxed{N = 0}$$
$$(\downarrow)\sum F_y = 0 \rightarrow \boxed{V = 0}$$
$$(\circlearrowleft)\sum M_5 = 0 \rightarrow \boxed{M = 0}$$

CORTE 6

$$(\rightarrow)\sum F_x = 0 \Rightarrow 10 + N - 5 = 0 \rightarrow \boxed{N = -5}$$
$$(\downarrow)\sum F_y = 0 \rightarrow V - 5 = 0 \rightarrow \boxed{V = 5}$$
$$(\circlearrowleft)\sum M_6 = 0 \rightarrow -5\cdot 3 + M = 0 \rightarrow \boxed{M = 15}$$

CORTE 7

$$(\rightarrow)\sum F_x = 0 \Rightarrow V - 5 = 0 \rightarrow \boxed{V = 5}$$
$$(\downarrow)\sum F_y = 0 \Rightarrow -N - 5 = 0 \rightarrow \boxed{N = -5}$$
$$(\circlearrowleft)\sum M_7 = 0 \Rightarrow -M - 5\cdot 3 \rightarrow \boxed{M = -15}$$

Puede verse que estos valores obtenidos equilibran el nudo con los esfuerzos obtenidos en los cortes 5 y 6.

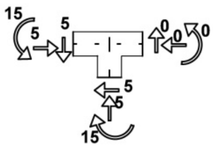


Figura 19. **Cálculo de esfuerzos en las distintas secciones**

Diagramas de esfuerzos

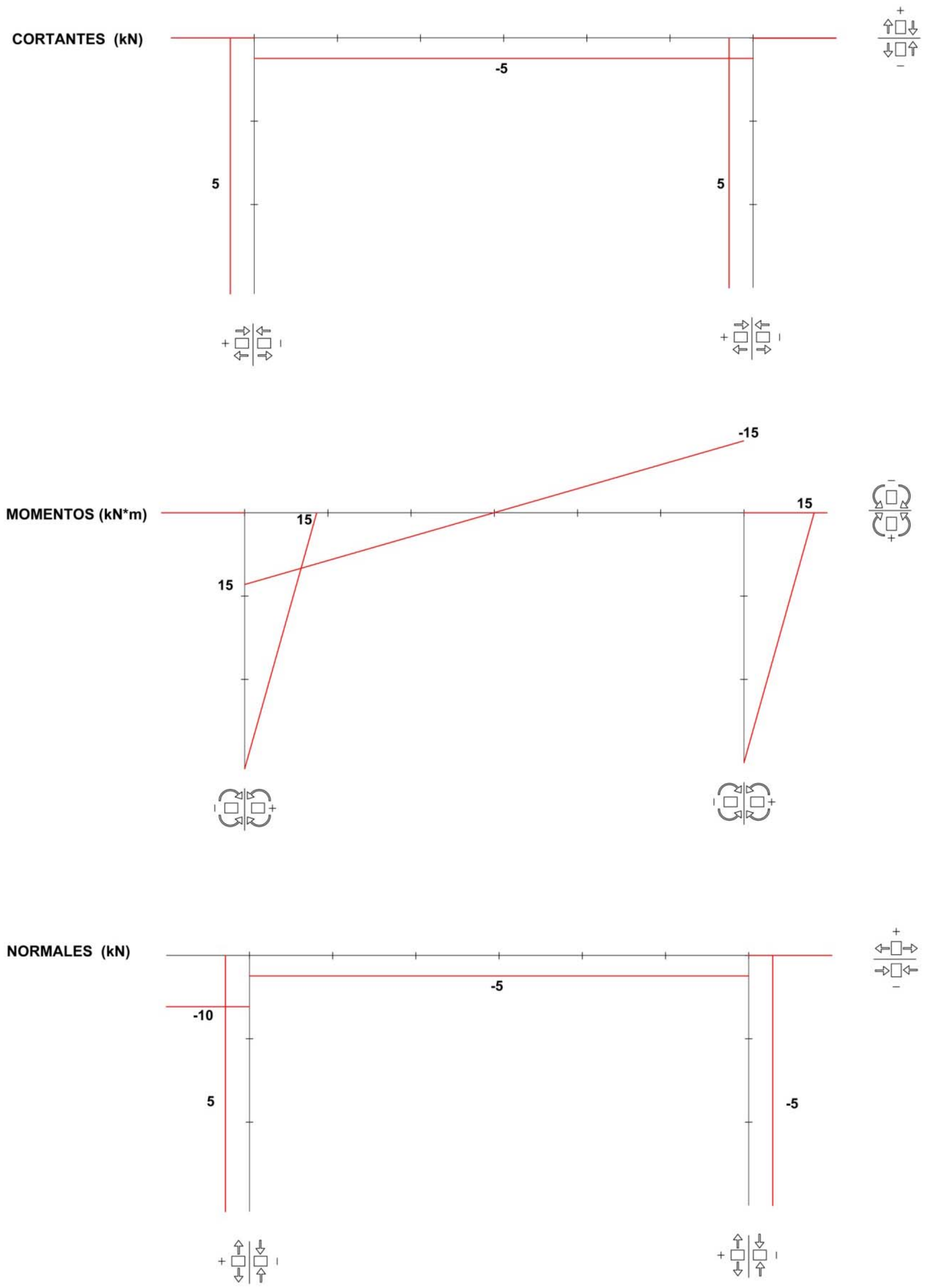


Figura 20. **Gráficas de esfuerzos cortantes, flectores y axiles del ejercicio 3**

- **EJERCICIO 4**

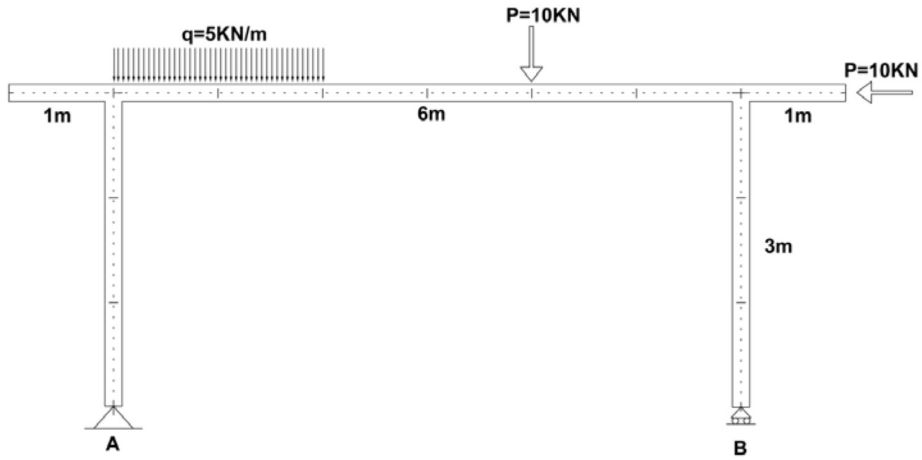


Figura 21. **Pórtico**

Cálculo de Reacciones

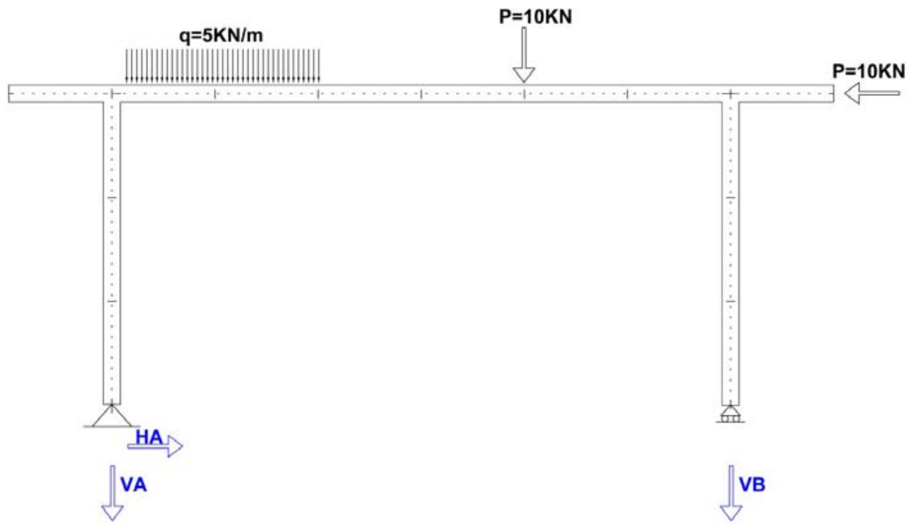


Figura 22. **Acciones y reacciones**

$$(\rightarrow)\sum F_x = 0 \Rightarrow -P + A_x = 0 \rightarrow \boxed{A_x = 10}$$

$$\sum M_A = 0 \quad (+\circlearrowright) \Rightarrow 5\cdot 2\cdot 1 + 4\cdot P + 6\cdot B_y - 3\cdot P = 0 \Rightarrow \boxed{B_y = -3{,}33}$$

$$\sum M_B = 0 \quad (+\circlearrowright) \Rightarrow -2\cdot 5\cdot q - 2\cdot P - 3\cdot P - 6\cdot A_y = 0 \Rightarrow \boxed{A_y = -16{,}67}$$

Al haber obtenido las reacciones verticales mediante dos ecuaciones independientes de momentos permite verificar la consistencia de dichos resultados mediante la ecuación el equilibrio global de fuerzas verticales, no usada todavía:

$$\sum F_y = 0 \quad (+\downarrow) \quad \Rightarrow 2\cdot q + P + A_y + B_y = 0 \Rightarrow ok$$

Cálculo de Esfuerzos

En la **Figura 23** se han numerado los cortes que se van a dar para una mayor claridad.

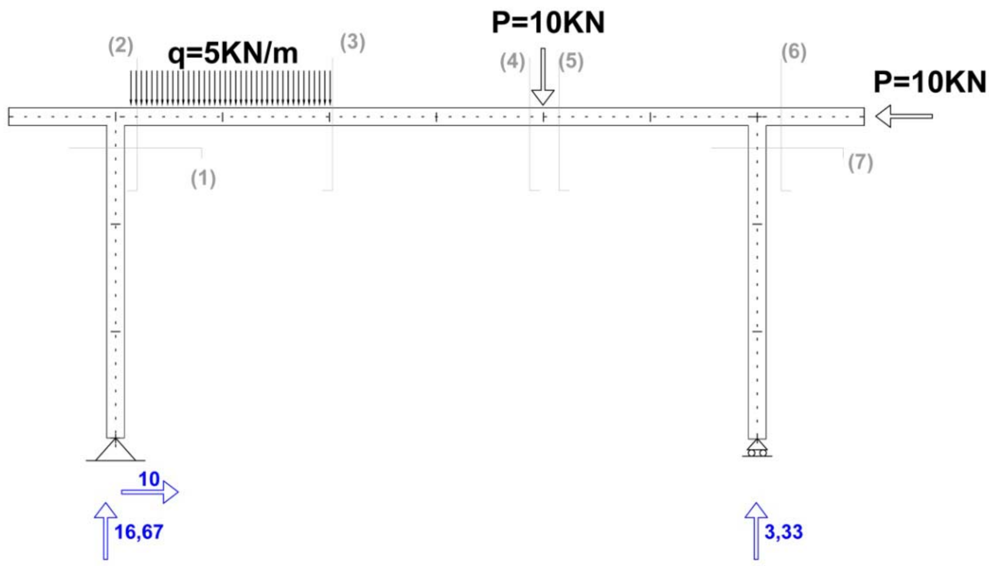
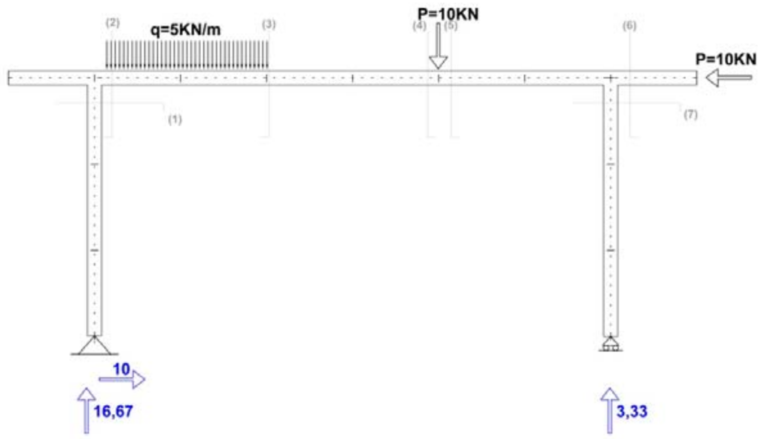


Figura 23. **Sistema completo de acciones y reacciones**



CORTE 1

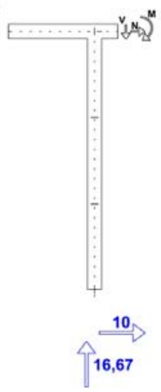
CORTE 1

$(\rightarrow)\sum F_x = 0 \Rightarrow V + 10 = \rightarrow \boxed{V = -10}$

$(\downarrow)\sum F_y = 0 \rightarrow -16,67 - N = 0 \rightarrow \boxed{N = -16,67}$

$(\circlearrowleft)\sum M_1 = 0 \rightarrow 10 \cdot 3 - M = 0 \rightarrow \boxed{M = 30}$

CORTE 2



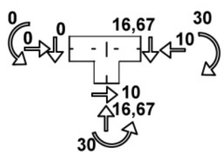
CORTE 2

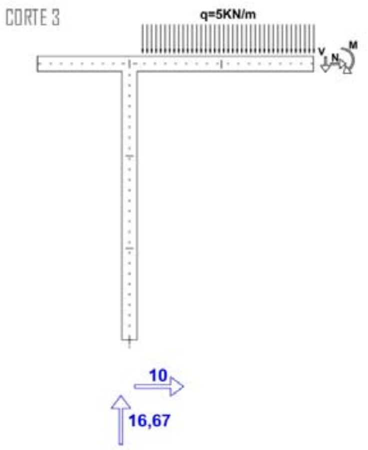
$(\rightarrow)\sum F_x = 0 \Rightarrow 10 + N = 0 \rightarrow \boxed{N = -10}$

$(\downarrow)\sum F_y = 0 \rightarrow V - 16,67 = 0 \rightarrow \boxed{V = 16,67}$

$(\circlearrowright)\sum M_2 = 0 \rightarrow M - 10 \cdot 3 = 0 \rightarrow \boxed{M = 30}$

Puede verse que estos valores obtenidos equilibran el nudo.





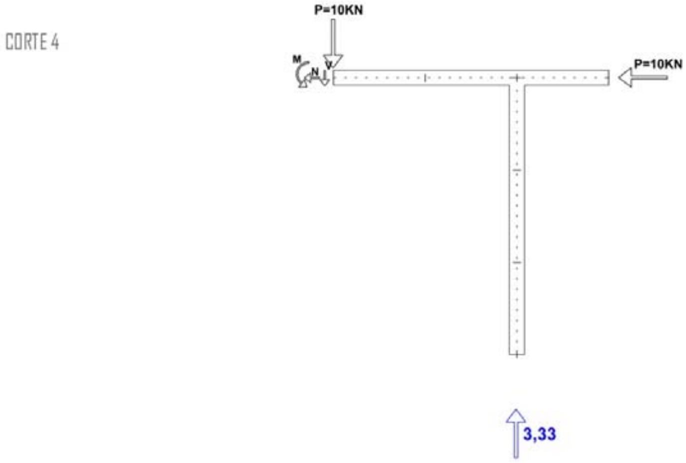
CORTE 3

$(\rightarrow)\sum F_x = 0 \Rightarrow 10 + N = 0 \rightarrow \boxed{N = -10}$

$(\downarrow)\sum F_y = 0 \rightarrow V + 2\cdot q - 16{,}67 = 0 \rightarrow \boxed{V = 6{,}67}$

$\circlearrowright \sum M_3 = 0 \rightarrow -2\cdot 1\cdot q + 16{,}67\cdot 2 - 10\cdot 3 + M = 0$

$\rightarrow \boxed{M = -15}$

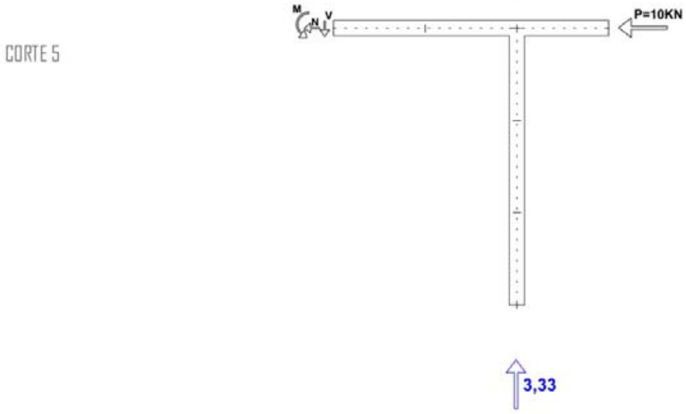


CORTE 4

$(\rightarrow)\sum F_x = 0 \Rightarrow -N - 10 = 0 \rightarrow \boxed{N = -10}$

$(\downarrow)\sum F_y = 0 \rightarrow 10 - V - 3{,}33 = 0 \rightarrow \boxed{V = 6{,}67}$

$\circlearrowright \sum M_4 = 0 \rightarrow -3{,}33\cdot 2 - M = 0 \rightarrow \boxed{M = -6{,}66}$

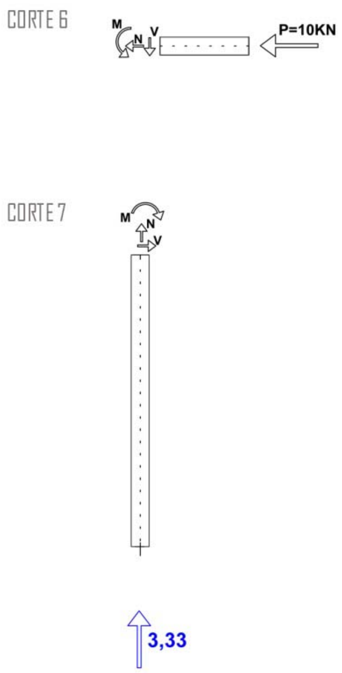


CORTE 5

$(\rightarrow)\sum F_x = 0 \Rightarrow -N - 10 = 0 \rightarrow \boxed{N = -10}$

$(\downarrow)\sum F_y = 0 \rightarrow -V - 3{,}33 = 0 \rightarrow \boxed{V = -3{,}33}$

$\circlearrowright \sum M_5 = 0 \rightarrow -3{,}33\cdot 2 - M = 0 \rightarrow \boxed{M = -6{,}66}$



CORTE 6

$$(\rightarrow)\sum F_x = 0 \Rightarrow -N - 10 = 0 \rightarrow \boxed{N = -10}$$

$$(\downarrow)\sum F_y = 0 \rightarrow -V = 0 \rightarrow \boxed{V = 0}$$

$$(\circlearrowright)\sum M_6 = 0 \rightarrow -M = 0 \rightarrow \boxed{M = 0}$$

CORTE 7

$$(\rightarrow)\sum F_x = 0 \Rightarrow V = 0 \rightarrow \boxed{V = 0}$$

$$(\downarrow)\sum F_y = 0 \rightarrow -N - 3{,}33 = 0 \rightarrow \boxed{N = -3{,}33}$$

$$(\circlearrowright)\sum M_7 = 0 \rightarrow M = 0 \rightarrow \boxed{M = 0}$$

Puede verse que estos valores obtenidos equilibran el nudo.

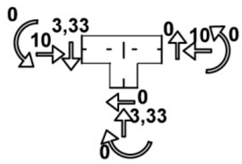


Figura 24. **Cálculo de esfuerzos en las distintas secciones**

Diagramas de esfuerzos

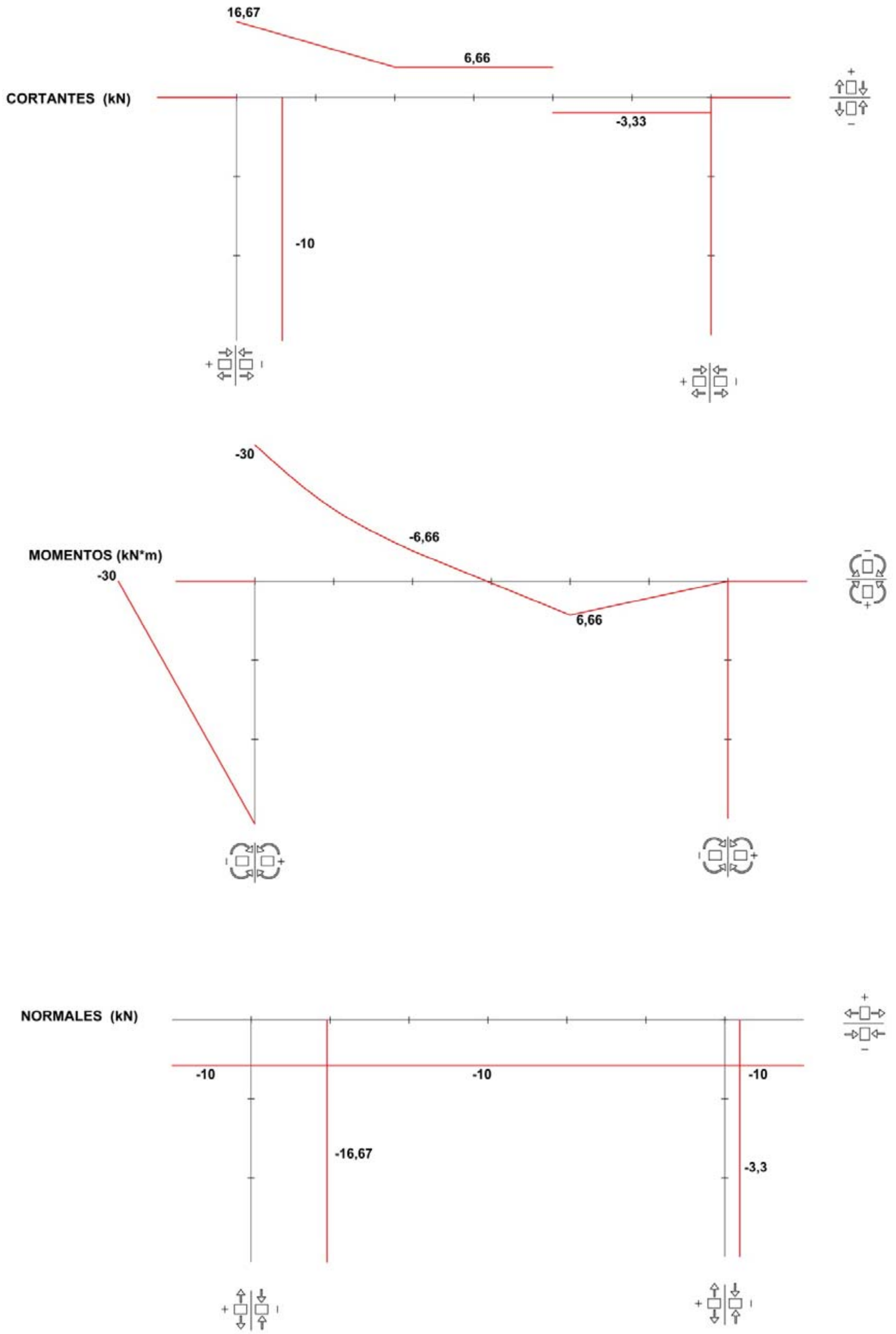


Figura 25. **Gráficas de esfuerzos cortantes, flectores y axiles del ejercicio 4**

- **EJERCICIO 5**

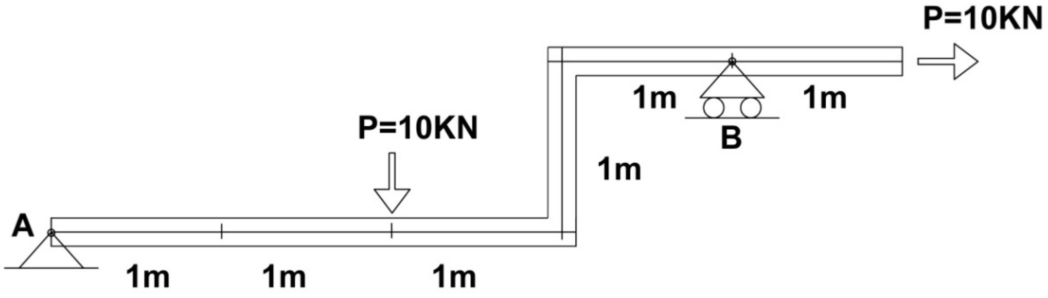


Figura 26. **Viga Biapoyada**

Cálculo de Reacciones

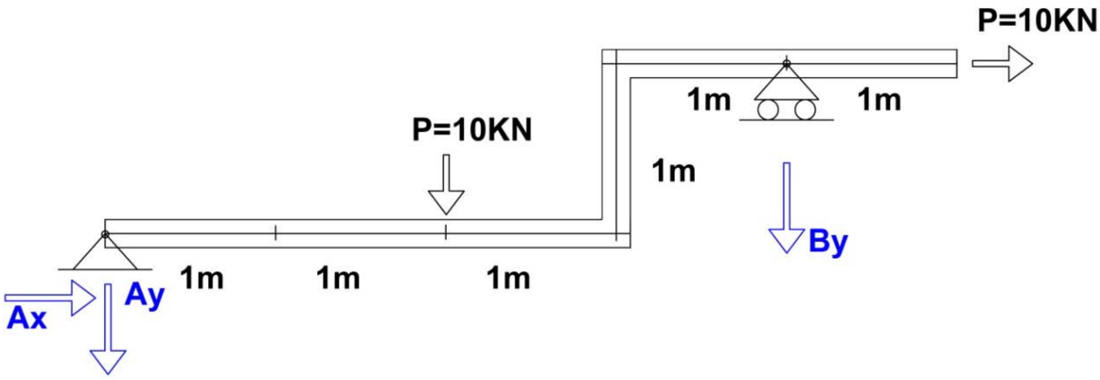


Figura 27. **Acciones y Reacciones**

$$(\rightarrow)\sum F_x = 0 \Rightarrow P + A_x = 0 \rightarrow \boxed{A_x = -10}$$

$$\sum M_A = 0 \quad (+\circlearrowright) \Rightarrow 1\cdot P + 2\cdot P + 4\cdot B_y = 0 \Rightarrow \boxed{B_y = -7{,}5}$$

$$\sum M_B = 0 \quad (+\circlearrowright) \Rightarrow 2\cdot P + 1\cdot A_x + 4\cdot A_y = 0 \Rightarrow \boxed{A_y = -2{,}5}$$

Al haber obtenido las reacciones verticales mediante dos ecuaciones independientes de momentos permite verificar la consistencia de dichos resultados mediante la ecuación el equilibrio global de fuerzas verticales, no usada todavía:

$$\sum F_y = 0 \quad (+\downarrow) \quad \Rightarrow P + A_y + B_y = 0 \Rightarrow ok$$

Cálculo de Esfuerzos

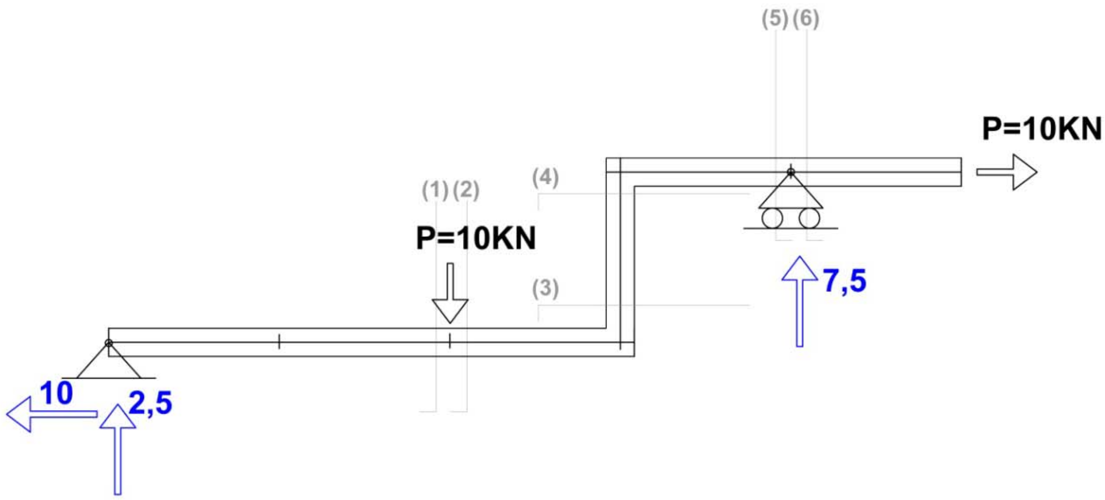
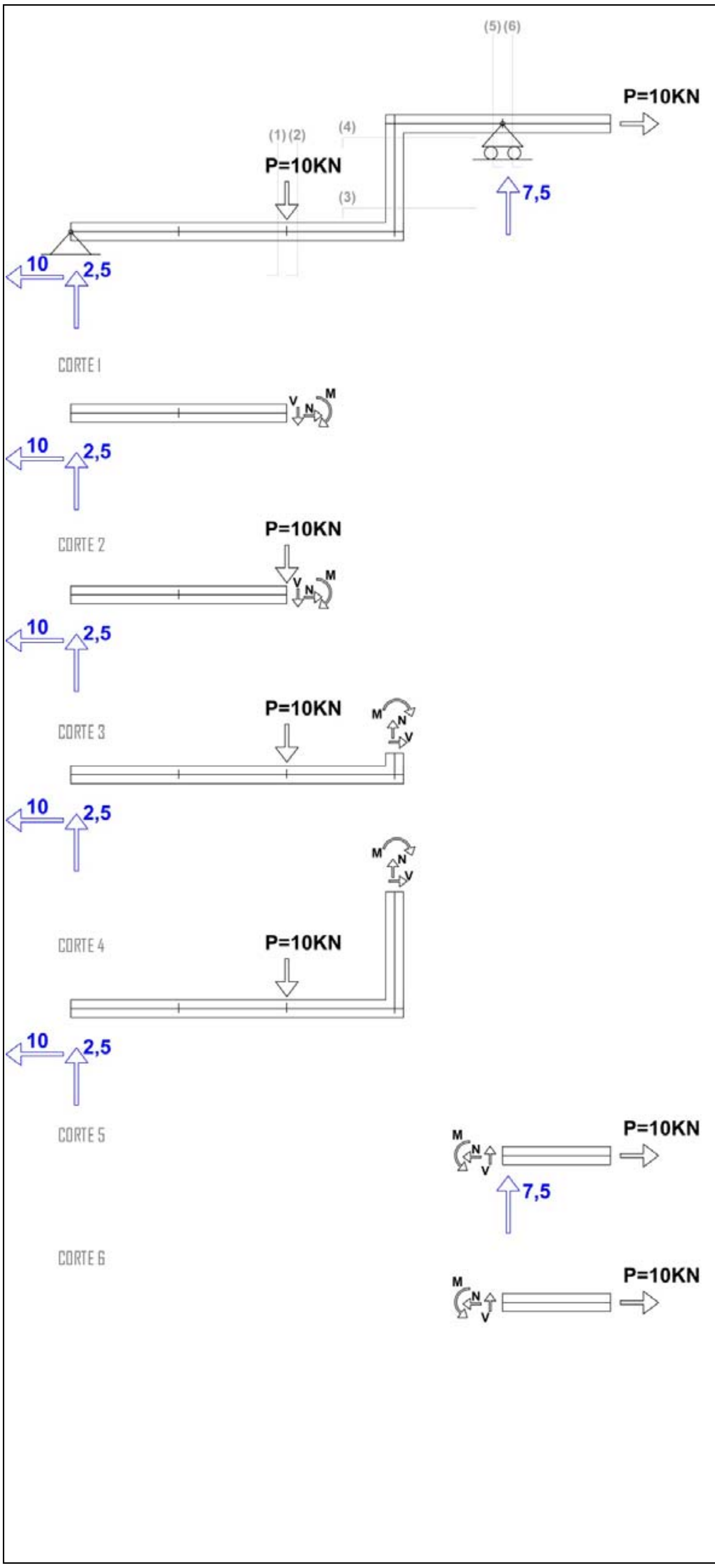


Figura 28. **Sistema completo de acciones y reacciones**

En la Figura 18 se han numerado los cortes que se van a dar para una mayor claridad.



CORTE 1

$$(\rightarrow)\sum F_x = 0 \Rightarrow N - 10 = \rightarrow \boxed{N = 10}$$

$$(\downarrow)\sum F_y = 0 \rightarrow -2,5 + V = 0 \rightarrow \boxed{V = 2,5}$$

$$(\circlearrowleft)\sum M_1 = 0 \rightarrow -2,5 \cdot 2 - M = 0 \rightarrow \boxed{M = -5}$$

CORTE 2

$$(\rightarrow)\sum F_x = 0 \Rightarrow N - 10 = \rightarrow \boxed{N = 10}$$

$$(\downarrow)\sum F_y = 0 \rightarrow -2,5 + V + 10 = 0 \rightarrow \boxed{V = 2,5}$$

$$(\circlearrowleft)\sum M_2 = 0 \rightarrow -M - 2,5 \cdot 2 = 0 \rightarrow \boxed{M = -5}$$

CORTE 3

$$(\rightarrow)\sum F_x = 0 \Rightarrow -10 + V = 0 \rightarrow \boxed{V = 10}$$

$$(\downarrow)\sum F_y = 0 \rightarrow -N + 10 - 2,5 = 0 \rightarrow \boxed{N = 7,5}$$

$$(\circlearrowleft)\sum M_3 = 0 \rightarrow P - 2,5 \cdot 3 - M = 0 \rightarrow \boxed{M = 2,5}$$

CORTE 4

$$(\rightarrow)\sum F_x = 0 \Rightarrow -10 + V = 0 \rightarrow \boxed{V = 10}$$

$$(\downarrow)\sum F_y = 0 \rightarrow 10 - N - 2,5 = 0 \rightarrow \boxed{N = 7,5}$$

$$(\circlearrowleft)\sum M_4 = 0 \rightarrow 10 \cdot 1 - 2,5 \cdot 3 - 10 \cdot 1 - M = 0 \rightarrow \boxed{M = -7,5}$$

CORTE 5

$$(\rightarrow)\sum F_x = 0 \Rightarrow N - 10 = 0 \rightarrow \boxed{N = 10}$$

$$(\downarrow)\sum F_y = 0 \rightarrow -V + 7,5 = 0 \rightarrow \boxed{V = 7,5}$$

$$(\circlearrowleft)\sum M_5 = 0 \rightarrow M = 0 \rightarrow \boxed{M = 0}$$

CORTE 6

$$(\rightarrow)\sum F_x = 0 \Rightarrow N = 0 \rightarrow \boxed{N = 0}$$

$$(\downarrow)\sum F_y = 0 \rightarrow V = 0 \rightarrow \boxed{V = 0}$$

$$(\circlearrowright)\sum M_6 = 0 \rightarrow -M = 0 \rightarrow \boxed{M = 0}$$

Figura 29. **Cálculo de esfuerzos en las distintas secciones**

Diagramas de esfuerzos

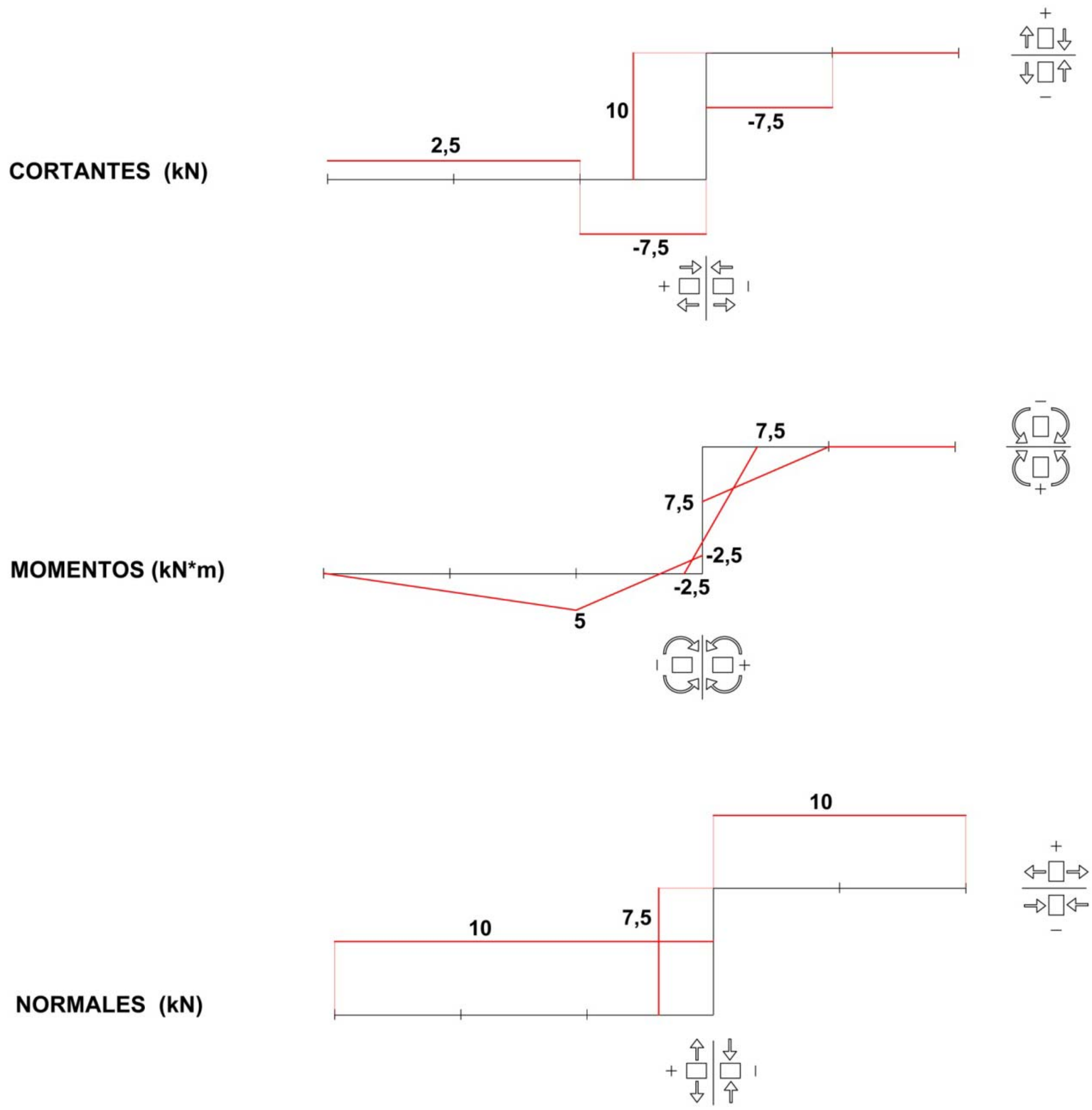


Figura 30. **Gráficas de esfuerzos cortantes, flectores y axiles del ejercicio 5**

- **EJERCICIO 6**

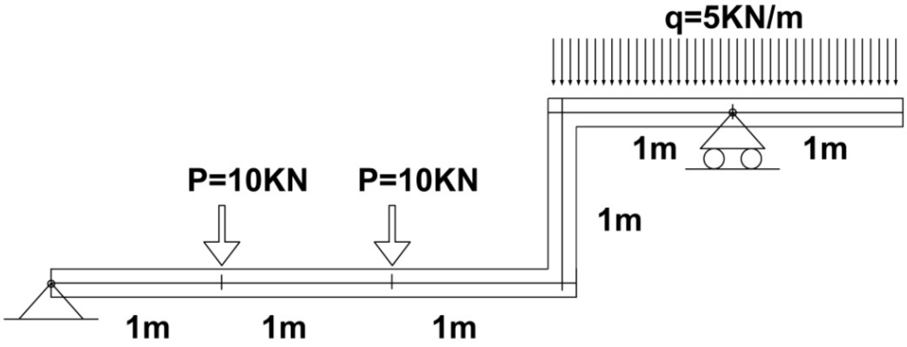


Figura 31. **Viga Biapoyada**

Cálculo de Reacciones

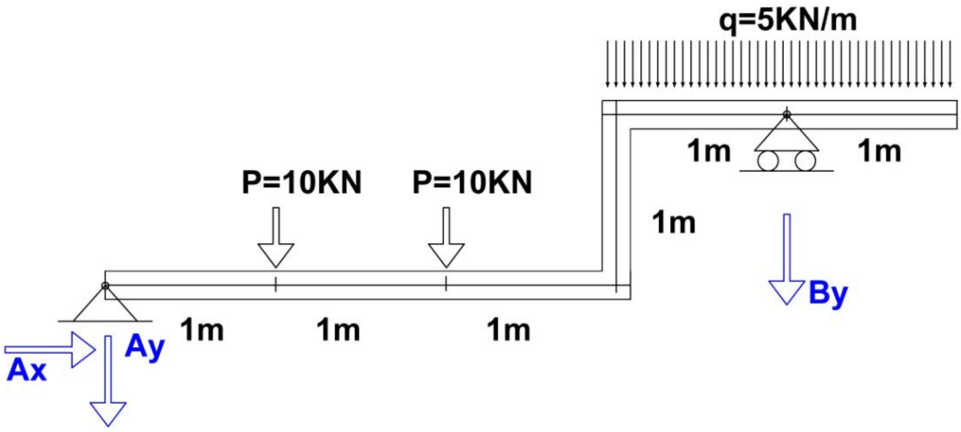


Figura 32. **Acciones y Reacciones**

$$(\rightarrow)\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0 \rightarrow \boxed{A_x = 0}$$

$$\sum M_A = 0 \quad (+\circlearrowright) \Rightarrow -1\cdot P - 2\cdot P - 4\cdot 2\cdot q - 4\cdot B_y = 0 \Rightarrow \boxed{B_y = -17{,}5}$$

$$\sum M_B = 0 \quad (+\circlearrowright) \Rightarrow 2\cdot P + 3\cdot P + 4\cdot A_y + 0{,}5\cdot q - 0{,}5\cdot q = 0 \Rightarrow \boxed{A_y = -12{,}5}$$

Verifiquemos la consistencia de dichos resultados mediante la ecuación el equilibrio global de fuerzas verticales, no usada todavía:

$$\sum F_y = 0 \quad (+\downarrow) \quad \Rightarrow P + P + 2\cdot q + A_y + B_y = 0 \Rightarrow ok$$

Cálculo de Esfuerzos

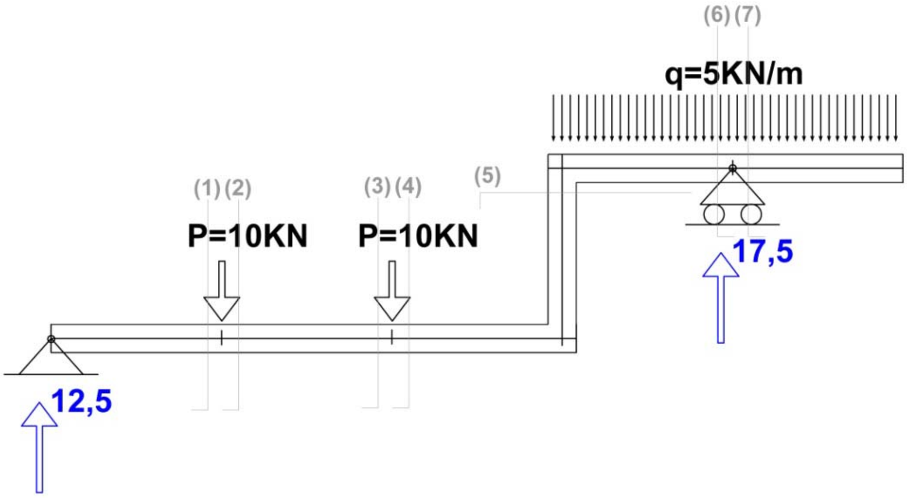
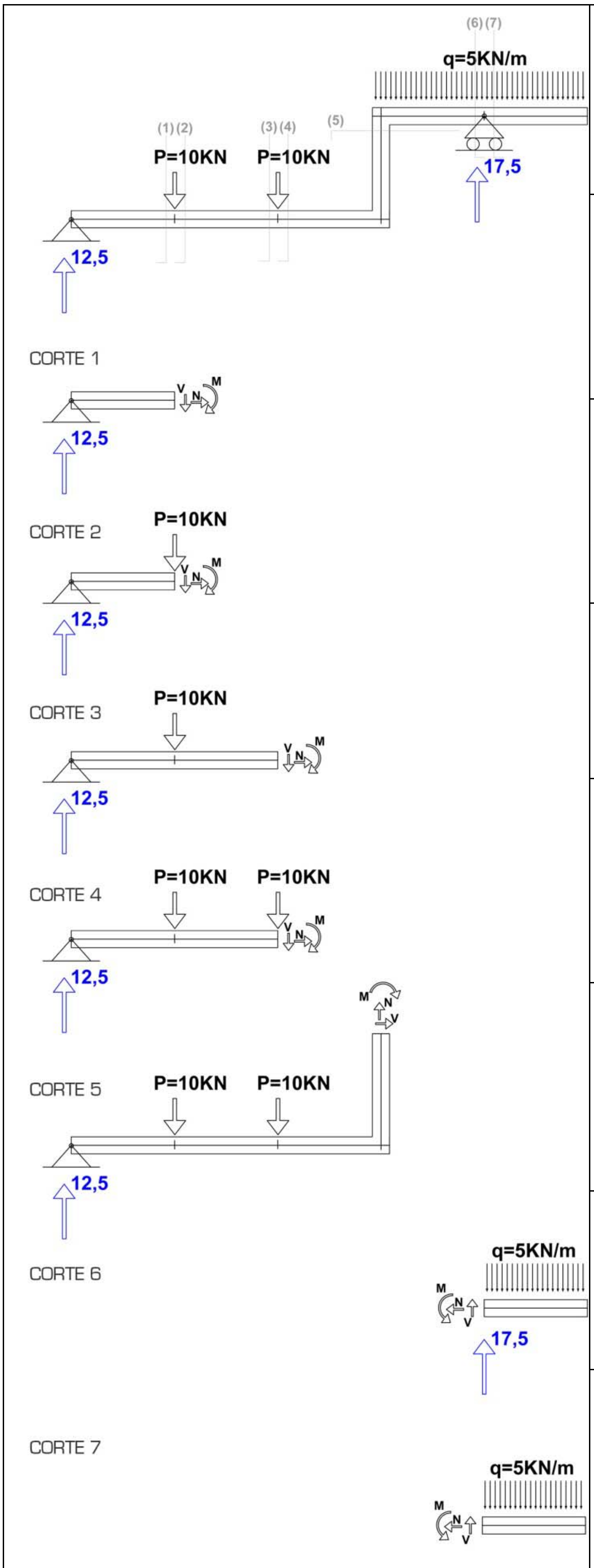


Figura 33. **Sistema completo de acciones y reacciones**

En la **Figura 33** se han numerado los cortes que se van a dar para una mayor claridad.



CORTE 1

$$(\rightarrow)\sum F_x = 0 \Rightarrow N = 0 \rightarrow \boxed{N=0}$$
$$(\downarrow)\sum F_y = 0 \rightarrow -12,5 + V = 0 \rightarrow \boxed{V = 12,5}$$
$$\sum M_1 = 0 \rightarrow -12,5 \cdot 1 - M = 0 \rightarrow \boxed{M = -12,5}$$

CORTE 2

$$(\rightarrow)\sum F_x = 0 \Rightarrow N = 0 \rightarrow \boxed{N=0}$$
$$(\downarrow)\sum F_y = 0 \rightarrow -12,5 + V + 10 = 0 \rightarrow \boxed{V = 2,5}$$
$$\sum M_1 = 0 \rightarrow -12,5 \cdot 1 - M = 0 \rightarrow \boxed{M = -12,5}$$

CORTE 3

$$(\rightarrow)\sum F_x = 0 \Rightarrow N = 0 \rightarrow \boxed{N=0}$$
$$(\downarrow)\sum F_y = 0 \rightarrow -12,5 + V + 10 = 0 \rightarrow \boxed{V = 2,5}$$
$$\sum M_4 = 0 \rightarrow 10 \cdot 1 - 12,5 \cdot 2 - 10 \cdot 1 - M = 0 \rightarrow \boxed{M = -15}$$

CORTE 4

$$(\rightarrow)\sum F_x = 0 \Rightarrow N = 0 \rightarrow \boxed{N=0}$$
$$(\downarrow)\sum F_y = 0 \rightarrow -12,5 + 10 + V + 10 = 0 \rightarrow \boxed{V = -7,5}$$
$$\sum M_4 = 0 \rightarrow 10 \cdot 1 - 12,5 \cdot 2 - 10 \cdot 1 - M = 0 \rightarrow \boxed{M = -15}$$

CORTE 5

$$(\rightarrow)\sum F_x = 0 \Rightarrow V = 0 \rightarrow \boxed{V=0}$$
$$(\downarrow)\sum F_y = 0 \rightarrow -N + 10 + 10 - 12,5 = 0 \rightarrow \boxed{N = 7,5}$$
$$\sum M_5 = 0 \rightarrow 10 \cdot 2 + 10 - 12,5 \cdot 3 - M = 0 \rightarrow \boxed{M = -7,5}$$

CORTE 6

$$(\rightarrow)\sum F_x = 0 \Rightarrow N = 0 \rightarrow \boxed{N=0}$$
$$(\downarrow)\sum F_y = 0 \rightarrow 5 \cdot 1 - 17,5 - V = 0 \rightarrow \boxed{V = -12,5}$$
$$\sum M_6 = 0 \rightarrow -5 \cdot 0,5 + M = 0 \rightarrow \boxed{M = 2,5}$$

CORTE 7

$$(\rightarrow)\sum F_x = 0 \Rightarrow N = 0 \rightarrow \boxed{N=0}$$
$$(\downarrow)\sum F_y = 0 \rightarrow 5 \cdot 1 - V = 0 \rightarrow \boxed{V = 5}$$
$$\sum M_6 = 0 \rightarrow -5 \cdot 0,5 + M = 0 \rightarrow \boxed{M = 2,5}$$

Figura 34. Cálculo de esfuerzos en las distintas secciones

Diagramas de esfuerzos

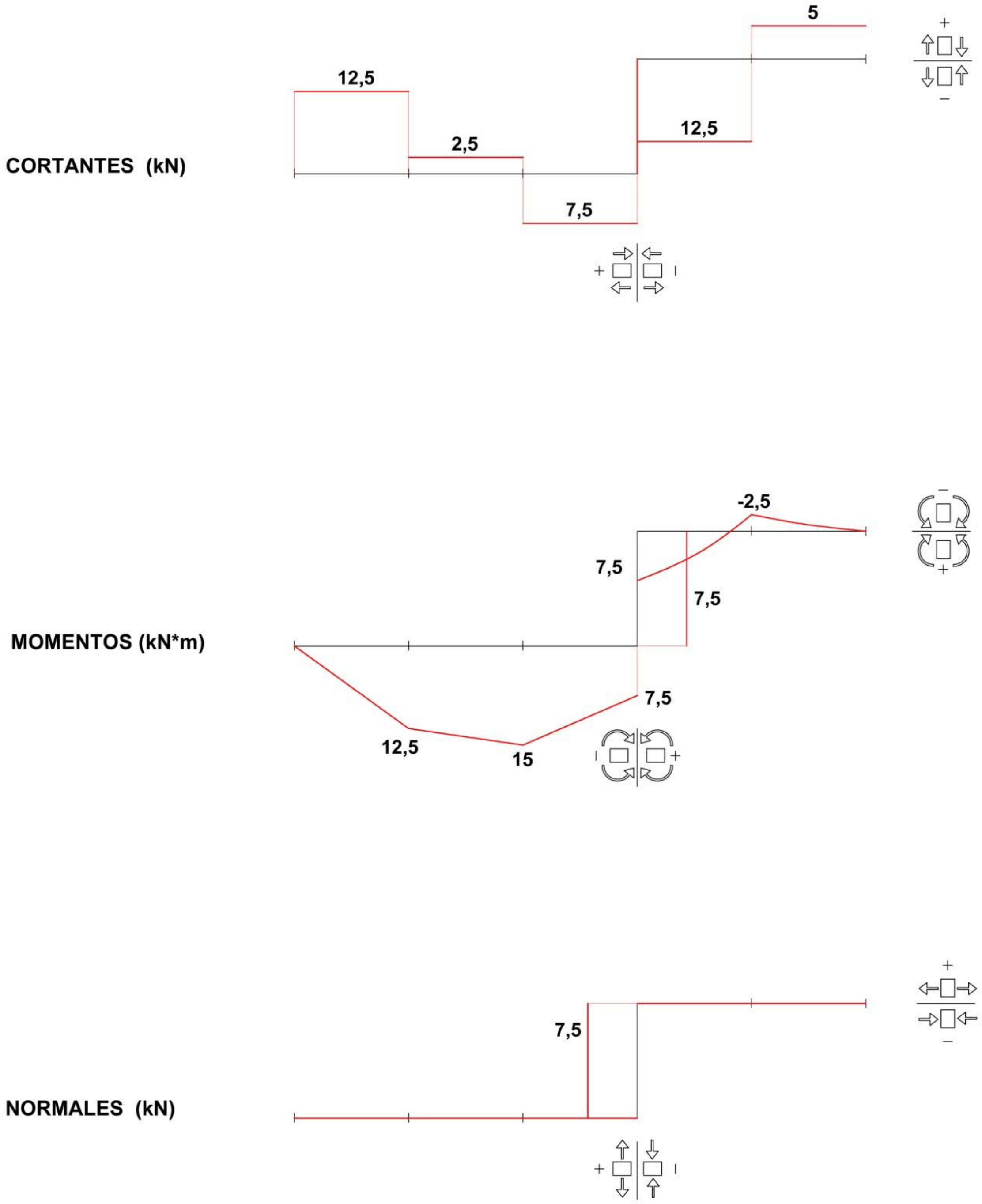


Figura 35. **Gráficas de esfuerzos cortantes, flectores y axiles del ejercicio 6**

- **EJERCICIO 7**

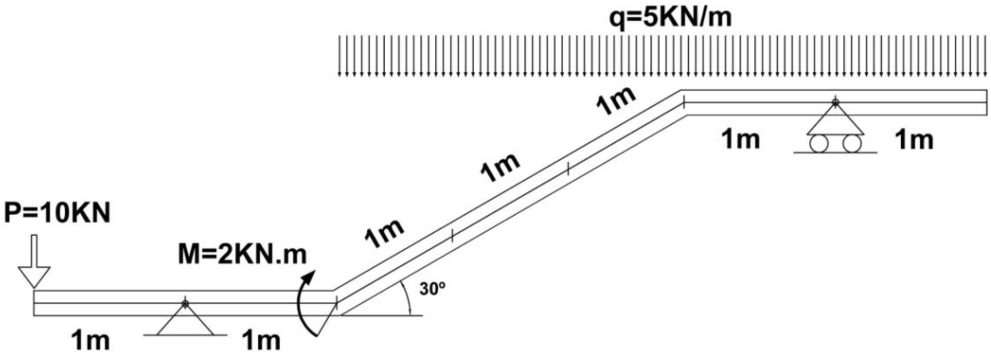


Figura 36. **Viga Biapoyada**

Cálculo de Reacciones

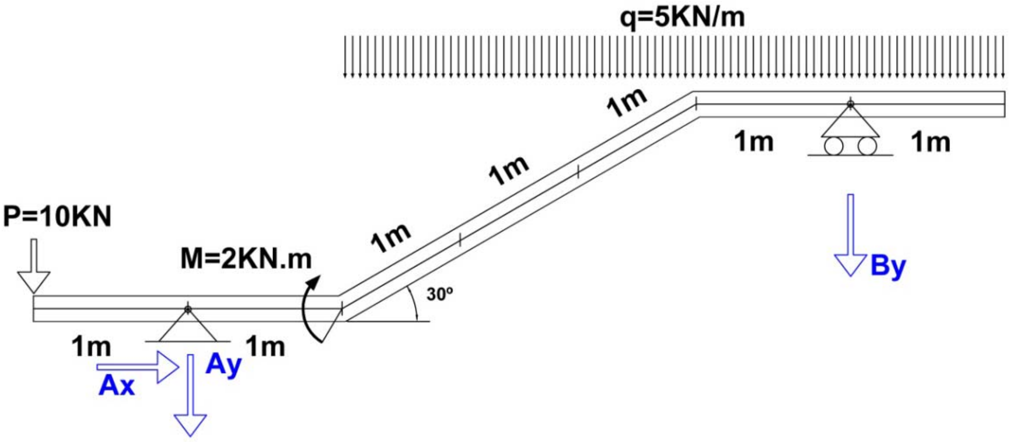


Figura 37. **Acciones y Reacciones**

$$(\rightarrow)\sum F_x = 0 \Rightarrow A_x = 0 \rightarrow \boxed{A_x = 0}$$

$$\sum M_A = 0 \quad (+\circlearrowright) \Rightarrow -1\cdot P - 2 + 4,6\cdot 3,3\cdot q + 4,6\cdot B_y = 0 \Rightarrow \boxed{B_y = -13,9}$$

$$\sum M_B = 0 \quad (+\circlearrowleft) \Rightarrow -5,6\cdot P - 2 - 4,6\cdot A_y - \frac{3,6^2\cdot q}{2} + 0,5\cdot q = 0 \Rightarrow \boxed{A_y = -12,5}$$

Verifiquemos la consistencia de dichos resultados mediante la ecuación el equilibrio global de fuerzas verticales, no usada todavía:

$$\sum F_y = 0 \quad (+\downarrow) \quad \Rightarrow P + 4,6\cdot q + A_y + B_y = 0 \Rightarrow ok$$

Cálculo de Esfuerzos

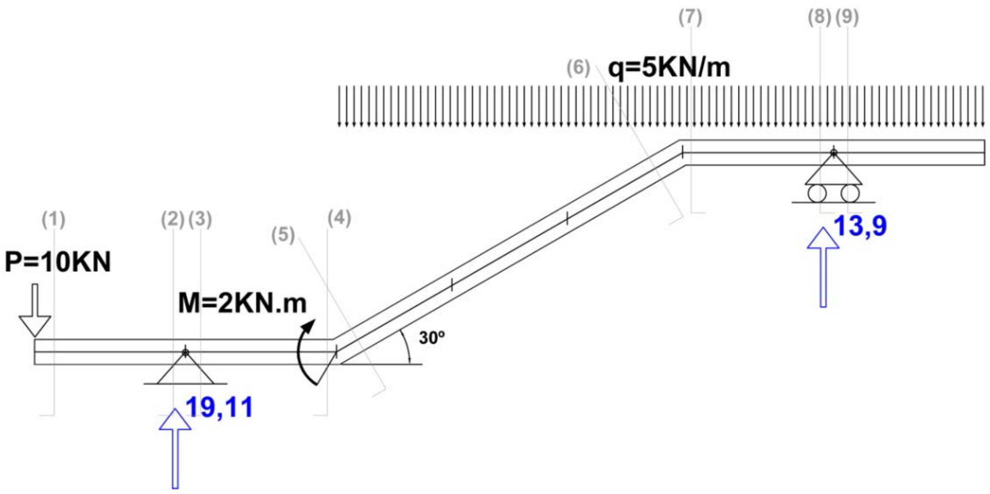
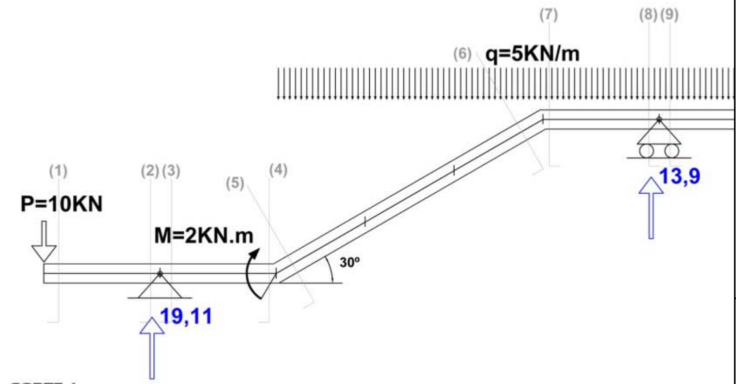
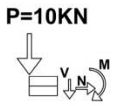


Figura 38. **Sistema completo de acciones y reacciones**

En la **Figura 38** se han numerado los cortes que se van a dar para una mayor claridad.



CORTE 1

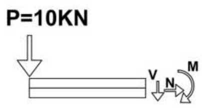


$$(\rightarrow)\sum F_x = 0 \Rightarrow N = 0 \rightarrow \boxed{N = 0}$$

$$(\downarrow)\sum F_y = 0 \rightarrow 10 + V = 0 \rightarrow \boxed{V = -10}$$

$$(\circlearrowleft)\sum M_1 = 0 \rightarrow M = 0 \rightarrow \boxed{M = 0}$$

CORTE 2

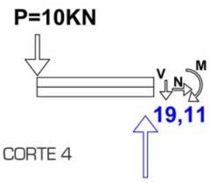


$$(\rightarrow)\sum F_x = 0 \Rightarrow N = 0 \rightarrow \boxed{N = 0}$$

$$(\downarrow)\sum F_y = 0 \rightarrow 10 + V = 0 \rightarrow \boxed{V = -10}$$

$$(\circlearrowleft)\sum M_1 = 0 \rightarrow 10 \cdot 1 - M = 0 \rightarrow \boxed{M = 10}$$

CORTE 3

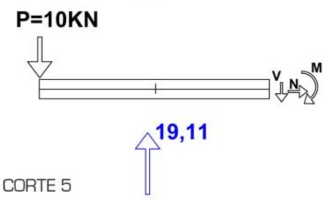


$$(\rightarrow)\sum F_x = 0 \Rightarrow N = 0 \rightarrow \boxed{N = 0}$$

$$(\downarrow)\sum F_y = 0 \rightarrow 10 + V - 19{,}11 = 0 \rightarrow \boxed{V = 9{,}11}$$

$$(\circlearrowleft)\sum M_1 = 0 \rightarrow 10 \cdot 1 - M = 0 \rightarrow \boxed{M = 10}$$

CORTE 4

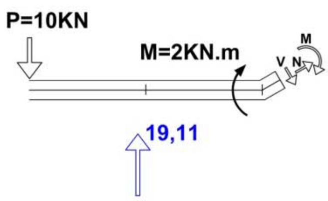


$$(\rightarrow)\sum F_x = 0 \Rightarrow N = 0 \rightarrow \boxed{N = 0}$$

$$(\downarrow)\sum F_y = 0 \rightarrow 10 + V - 19{,}11 = 0 \rightarrow \boxed{V = 9{,}11}$$

$$(\circlearrowleft)\sum M_4 = 0 \rightarrow 10 \cdot 2 - 19{,}11 \cdot 1 - M = 0 \rightarrow \boxed{M = 0{,}9}$$

CORTE 5



$$(\rightarrow)\sum F_x = 0 \Rightarrow N \cdot \cos 30 + V \cdot \cos 60 = 0$$

$$(\downarrow)\sum F_y = 0 \rightarrow -N \cdot sen30 + V \cdot sen60 + 10 - 19{,}11 = 0$$

$$\boxed{N = -4{,}68}$$

$$\boxed{V = 7{,}8}$$

$$(\circlearrowleft)\sum M_5 = 0 \rightarrow 10 \cdot 2 - 19{,}11 + 2 - M = 0 \rightarrow \boxed{M = 2{,}9}$$

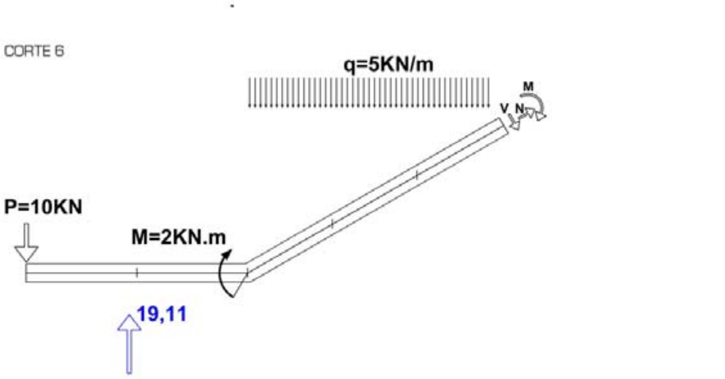
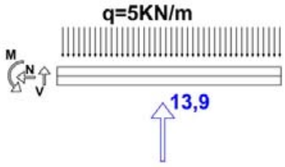
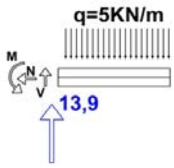
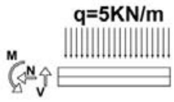
CORTE 6  	CORTE 6 $(\rightarrow)\sum F_x = 0 \Rightarrow N\cdot\cos 30 + V\cdot\cos 60 = 0$ $(\downarrow)\sum F_y = 0 \rightarrow -N\cdot sen30 + V\cdot sen60 +$ $+5\cdot 2,6 + 10 - 19,11 = 0$ $\boxed{N=-2}$ $\boxed{V=-3,32}$ $(\circlearrowleft)\sum M_5 = 0 \rightarrow 10\cdot 4,6 - 19,11\cdot 3,6 + 2 + \frac{5\cdot 2,6^2}{2} - M = 0$ $\rightarrow \boxed{M=-3,9}$
CORTE 7  	CORTE 7 $(\rightarrow)\sum F_x = 0 \Rightarrow N = 0 \rightarrow \boxed{N=0}$ $(\downarrow)\sum F_y = 0 \rightarrow 5\cdot 2 - V - 13,9 = 0 \rightarrow \boxed{V=-3,9}$ $(\circlearrowleft)\sum M_1 = 0 \rightarrow 13,9\cdot 1 - 5\cdot 2 + M = 0 \rightarrow \boxed{M=-3,9}$
CORTE 8  	CORTE 8 $(\rightarrow)\sum F_x = 0 \Rightarrow N = 0 \rightarrow \boxed{N=0}$ $(\downarrow)\sum F_y = 0 \rightarrow 5\cdot 1 - V - 13,9 = 0 \rightarrow \boxed{V=-8,9}$ $(\circlearrowleft)\sum M_1 = 0 \rightarrow -5\cdot 0,5 + M = 0 \rightarrow \boxed{M=2,5}$
CORTE 9  	CORTE 9 $(\rightarrow)\sum F_x = 0 \Rightarrow N = 0 \rightarrow \boxed{N=0}$ $(\downarrow)\sum F_y = 0 \rightarrow 5\cdot 1 - V = 0 \rightarrow \boxed{V=5}$ $(\circlearrowleft)\sum M_1 = 0 \rightarrow -5\cdot 0,5 + M = 0 \rightarrow \boxed{M=2,5}$

Figura 39. **Cálculo de esfuerzos en las distintas secciones**

Diagramas de esfuerzos

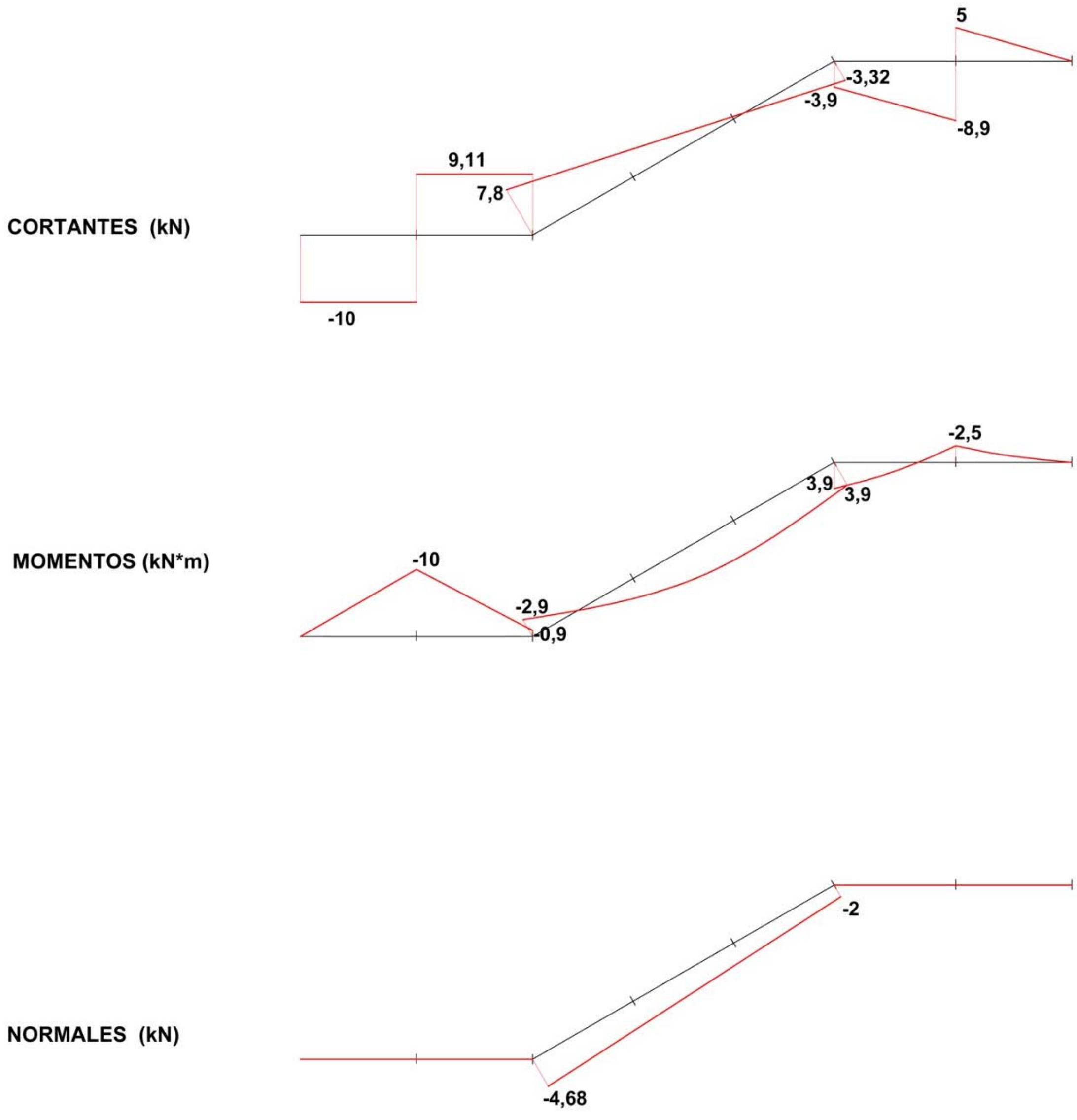


Figura 40. **Gráficas de esfuerzos cortantes, flectores y axiles del ejercicio 7**